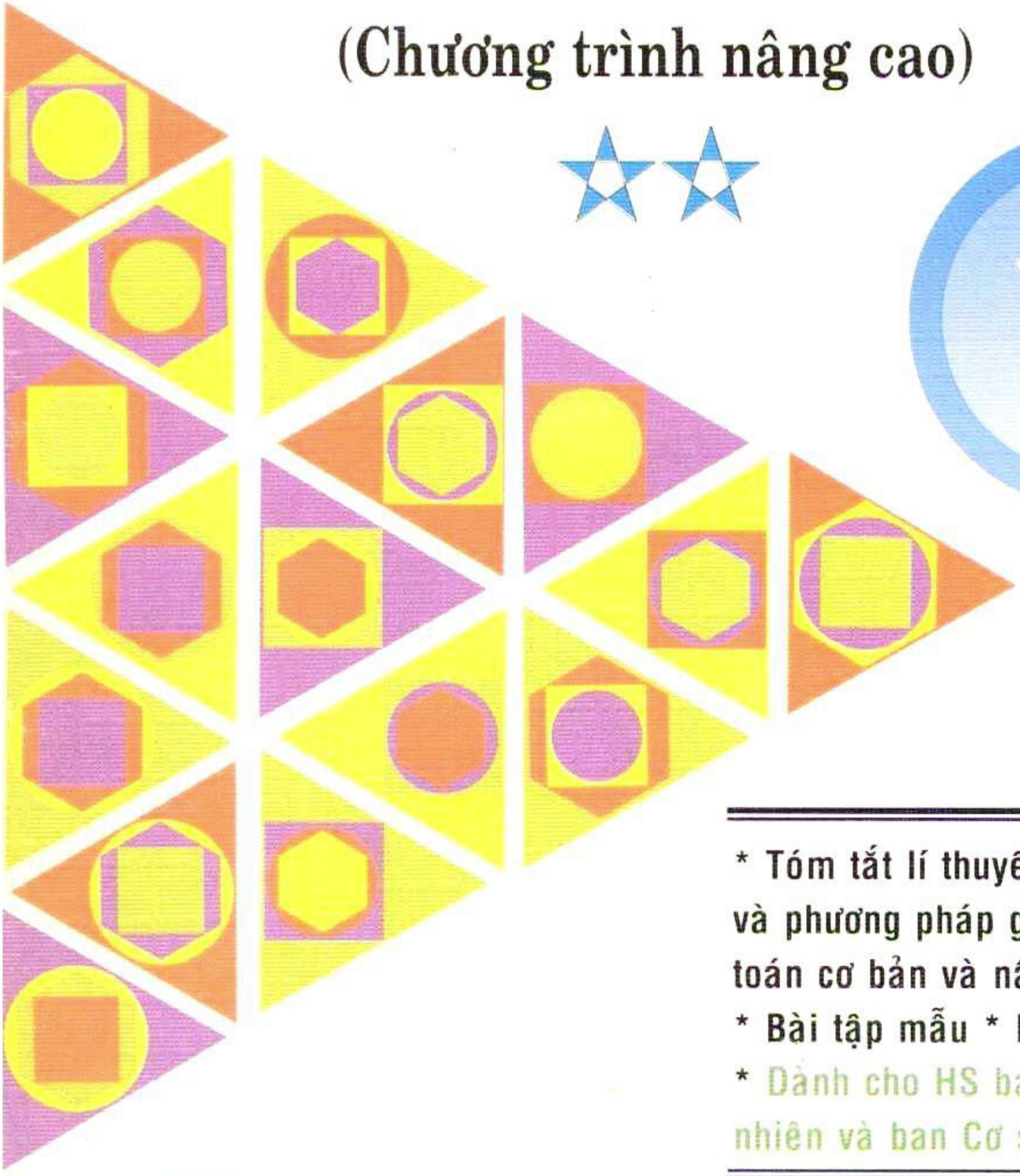
Th.S NGUYỄN KIẾM - Th.S LÊ THỊ HƯƠNG - Th.S HỒ XUÂN THẮNG

Phân loại và phương pháp giải các dạng bài tập Toán

(Chương trình nâng cao)

★★

10



- * Tóm tắt lí thuyết
- * Phân loại và phương pháp giải các dạng toán cơ bản và nâng cao
- * Bài tập mẫu
- * Bài tập áp dụng
- * Dành cho HS ban Khoa học tự nhiên và ban Cơ sở

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.S NGUYỄN KIẾM - Th.S LÊ THỊ HƯƠNG - Th.S HỒ XUÂN THẮNG

Tài liệu bổ trợ dành cho học sinh ban KHTN và ban CS

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP TOÁN 10

☆☆

(Biên soạn theo chương trình cơ sở và nâng cao mới của Bộ GD & ĐT)

* Kiến thức cần nhớ

* Phân loại các dạng toán

* Phương pháp giải bài tập. Các dạng bài tập mẫu

* Bài tập áp dụng tự giải

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

Chương I: Vectơ 3

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức vectơ 5

Dạng 2: Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương 11

Hướng dẫn - lời giải - đáp số 17

Chương II: Tích vô hướng của hai vectơ và ứng dụng 23

Bài 1: Tích vô hướng của hai vectơ 23

Dạng 1: Các bài toán liên quan đến tích vô hướng 24

Dạng 2: Xác định điểm hay tập hợp điểm thoả mãn đẳng thức vectơ cho trước 28

Dạng 3: Dùng phương pháp vectơ để giải một số dạng bài toán hình học phẳng 35

Bài 2: Hệ thức lượng trong tam giác 45

Bài 3: Một số ứng dụng của tích vô hướng 52

Hướng dẫn - lời giải - đáp số 55

Chương III: Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng 78

Bài 1: Hệ trục toạ độ 78

Bài 2: Phương trình tổng quát của đường thẳng 86

Bài 3: Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng 91

Bài 4: Khoảng cách và góc 95

Bài 5: Đường tròn 104

Bài 6: Elip 116

Bài 7: Hyperbol 123

Bài 8: Parabol 131

Hướng dẫn - lời giải - đáp số 140

Chương I VECTƠ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. VECTƠ

1. Định nghĩa

* *Vectơ là đoạn thẳng định hướng*

– Một điểm được xác định là điểm gốc (điểm đầu), còn điểm kia là điểm ngọn (điểm cuối).

– Hướng từ điểm gốc đến điểm ngọn là hướng của vectơ.

– Độ dài của đoạn thẳng gọi là độ dài của vectơ

* *Kí hiệu:* *Vectơ có điểm gốc A, điểm ngọn B kí hiệu* $\overrightarrow{AB}$

Độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$ *kí hiệu là* $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Đường thẳng AB gọi là giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$

* *Vectơ không kí hiệu* $\overrightarrow{O}$ *là vectơ:*

– Có điểm gốc và điểm ngọn trùng nhau

– Có hướng bất kì

– Độ dài bằng 0

2. Vectơ cùng phương, cùng hướng

* *Hai vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{CD}$ *được gọi là cùng phương kí hiệu:*

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB // CD \\ A, B, C, D \text{ thẳng hàng} \end{array}\right.$$

(giá của chúng song song hoặc trùng nhau)

* *Hai vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{CD}$ *được gọi là cùng hướng kí hiệu:*

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \\ \text{Tia } AB, CD \text{ cùng hướng} \end{cases}$$

* *Hai vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{CD}$ *được gọi là ngược hướng kí hiệu:*

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \\ \text{Tia } AB, CD \text{ ngược hướng} \end{cases}$$

3. Vectơ bằng nhau, đối nhau

* *Hai vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{CD}$ *được gọi là bằng nhau, kí hiệu:*

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}AB=CD\\ \overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}\end{cases}$$

* *Hai vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{CD}$ *được gọi là đối nhau, kí hiệu:*

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}AB=CD\\ \overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}\end{cases}$$

II. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ HAI VECTƠ

1. Phép cộng hai vectơ

a. Định nghĩa

Cho 2 vectơ $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. *Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ* $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. *Vectơ* $\overrightarrow{AC}$ *được gọi là tổng của 2 vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. *Kí hiệu* $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$

b. Các quy tắc

* *Quy tắc 3 điểm: Với 3 điểm A, B, C bất kì ta luôn có* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AAC}$

* *Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành ABCD, ta luôrôn có* $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

c. Tính chất của phép cộng vectơ

Với mọi vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *ta có:*

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$

2. Phép trừ hai vectơ

a. Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. *Ta gọi vectơ* $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ *là hiệu của hai vvectơ* $\vec{a},\vec{b}$ *và kí hiệu* $\vec{a}-\vec{b}$

Như vậy: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

b. Quy tắc

Cho hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, *với mọi điểm O bất kì ta có:* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OAA}$

III. PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

1. Định nghĩa

* *Cho số* $k \neq 0$ *và vectơ* $\vec{a} \neq \vec{0}$. *Tích của số* k *với vectơ* $\vec{a}$ *là một vectơ kí hiệu* $k\vec{a}$ *được xác định:*

– *Cùng hướng với* $\vec{a}$ *nếu* $k > 0$, *ngược hướng với* $\vec{a}$ *nếu* $k < 0$.

– *Độ lớn* $\left|k\vec{a}\right| = |k|\left|\vec{a}\right|$.

Ta quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}$ *và* $k.\vec{0} = \vec{0}$.

2. Tính chất của phép nhân một số với một vectơ

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, *với mọi số* k, h *ta có:*

- $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$
- $\left(k + h\right)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$
- $k\left(h\vec{a}\right) = \left(kh\right)\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}; \left(-1\right)\vec{a} = -\vec{a}; 0.\vec{a} = \vec{0}; k.\vec{0} = \vec{0}$.

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương, ba điểm thẳng hàng

- $\vec{a} \,//\, \vec{b}\left(\vec{b} \neq \vec{0}\right) \Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{a} = k\vec{b}$
- *A, B, C thẳng hàng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \neq 0$.

4. Tính chất các trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác

- *I là trung điểm của AB* $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ *với mọi điểm M.*
- *G là trọng tâm,* $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

Phương pháp:

Để chứng minh một đẳng thức vectơ ta chú ý.

1) Sử dụng:

– *Quy tắc 3 điểm:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, *với mọi A, B, C*

– *Quy tắc hình bình hành:* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ *với ABCD là hình bình hành*

– *Quy tắc trung điểm:* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, *với I là trung điểm của AB*

– *Quy tắc trọng tâm:* $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, *với G là trọng tâm* ΔABC

– *Các tính chất của các phép toán*

2) Thực hiện các phép biến đổi theo một trong các hướng sau:

– Biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức (thông thường là xuấ phát từ vế phức tạp biến đổi rút gọn để đưa về vế đơn giản hơn)

– Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về tương đương với 1 đẳngg thứ hằng đúng.

– Xuất phát từ 1 đẳng thức luôn đúng để biến đổi về đẳng thứức cầ chứng minh.

Bài 1: *Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:*

a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

b. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

Giải

a. Cách 1: Biến đổi vế trái (VT) ta có:

$$VT = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})$$

$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\vec{0}$$

$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=VP \quad (\text{đpcm})$$

Nhận xét: *Sử dụng cách giải này, ta cần chú ý khi biến đổi các số ố hạng của một vế cần quan tâm phân tích làm xuất hiện các số hạng có ở vvế bên kia. Chẳng hạn số hạng ở vế trái là* $\overrightarrow{AB}$ *nhưng vế phải có chứa* $\overrightarrow{AD}$ *, nên ta viết* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (1)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}$ (2)

Ta có (2) luôn đúng vậy (1) được chứng minh

Cách 3: Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BC}$

Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ (đpcm)

b. Ta có $VT = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})-(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})$

$$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}$$

$$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=VP \quad (\text{đpcm})$$

Tương tự, ta cũng có các cách giải khác cho câu b.

Bài 2: *Cho ΔABC và G là trọng tâm ΔABC*

a. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

b. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$

Giải:

a. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})$

$=3\overrightarrow{MG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})\ =\ 3\overrightarrow{MG}+\vec{0}$

$=3\overrightarrow{MG}$ (đpcm)

b. Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{MG}=\vec{o}$ hay $\overrightarrow{MG}=\vec{0}$ do đó $M\equiv G$

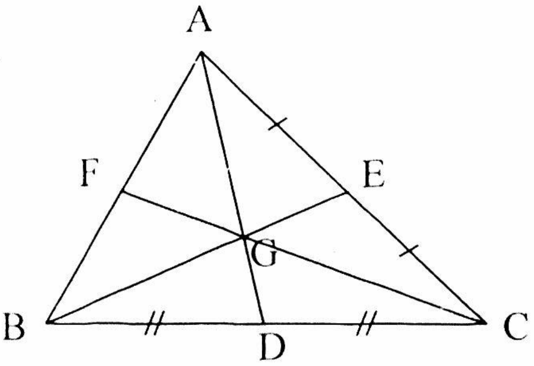
Suy ra tập hợp M thoả $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{O}$ là $\{G\}$.

Bài 3: *Cho ΔABC có D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:*

a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

b. $\forall M,\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$

Giải:



a. Vì D là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Tương tự $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$

Do đó: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}\right)\ =\ \vec{0}$

Cách khác:

Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó ta có:

$\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{GA}$; $\quad\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{GB}$; $\quad\overrightarrow{CF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{GC}$

Suy ra: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\ -\frac{3}{2}.\vec{0}\ =\ \vec{0}$.b.

b. Với mọi điểm M ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MF}$

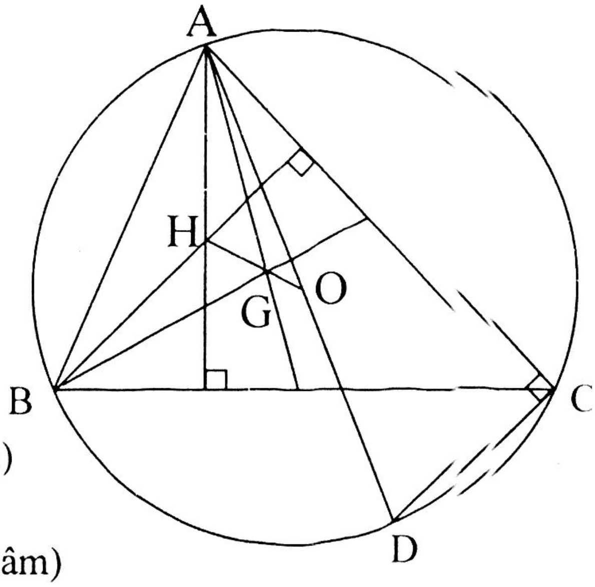
$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$

$$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{ME}$$

Suy ra: $2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=2\left(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right)$

Vậy: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$.

Bài 4: *Cho ΔABC và G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Chứng minh rằng:*



a. $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$

b. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

c. $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$

d. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

e. $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

Giải:

a. Ta có $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=1v$

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra: BD ⊥ AB

Mặt khác CH ⊥ AB (vì H là trực tâm)

Do vậy BD // CH

Tương tự ta có CD // BH

Từ đó suy ra HBDC là hình bình hành.

Do đó $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$

b. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$

$$=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$$

c. $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}-\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$

$$=\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{OA}$$

d. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}\right)+\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC}\right)$

$$=3\overrightarrow{OH}+\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HO}$$

$$=3\overrightarrow{OH}-2\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OH}$$

e. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (xem bài 2)

Bài 5: *Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F lầm lượt là trung điểm của AB, CD; O là trung điểm của EF. Chứng minh rằng:*

a. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}$

b. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

Giải:

a. Ta có VT $=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

$$=2\overrightarrow{OE}+2\overrightarrow{OF}=2\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$$

$$=\overrightarrow{O}=\text{VP (đpcm)}$$

b. Ta có

$$\text{VT}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)$$

$$=4\overrightarrow{MO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=4\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{O}$$

$$=4\overrightarrow{MO}=\text{VP (đpcm)}$$

Bài 6: *Cho ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$. Gọi G, G_1 lần lượt là trọng tâm ΔABC và $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng:* $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=3\overrightarrow{GG_1}$

Giải:

Ta có:

$$\text{VT}=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1A_1}\right)+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1B_1}\right)+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1C_1}\right)$$

$$=3\overrightarrow{GG_1}+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+\left(\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_1B_1}+\overrightarrow{G_1C_1}\right)$$

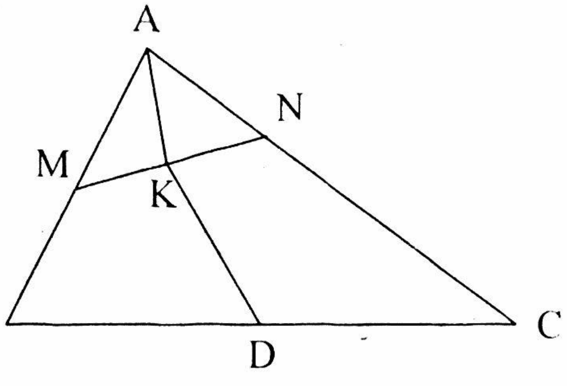
$$=3\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{O}+\overrightarrow{O}=3\overrightarrow{GG_1}=\text{VP (đpcm)}$$

Bài 7: *Cho ΔABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là điểm trên cạnh AC sao cho $NC=2NA$. Gọi K là trung điểm của MN*

a. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

b. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{KD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Giải:



a. Ta có: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)$

(vì K là trung điểm của MN)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

b. Ta có: $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \overrightarrow{KA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Bài 8: *Cho 2 điểm AB, M là điểm trên đường thẳng AB sao ch* $n\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{MB}$. *Chứng minh rằng với điểm O bất kì, ta có:*

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

Giải:

Ta có $n\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{MB}$

Suy ra $n\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right) = m\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)$

Do đó: $(m+n)\overrightarrow{OM} = n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}$

Như vậy: $\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.

Bài 9: *Cho ΔABC. Trên cạnh AB, AC lấy các điểm M, N sao cho* $\frac{NA}{MB} = a$ $\frac{MA}{NC} = b$. *Hai đường thẳng CM và BN cắt nhau tại I. Chứng minh rằn* $\overrightarrow{AI} = a\overrightarrow{IB} + b\overrightarrow{IC}$.

Giải:

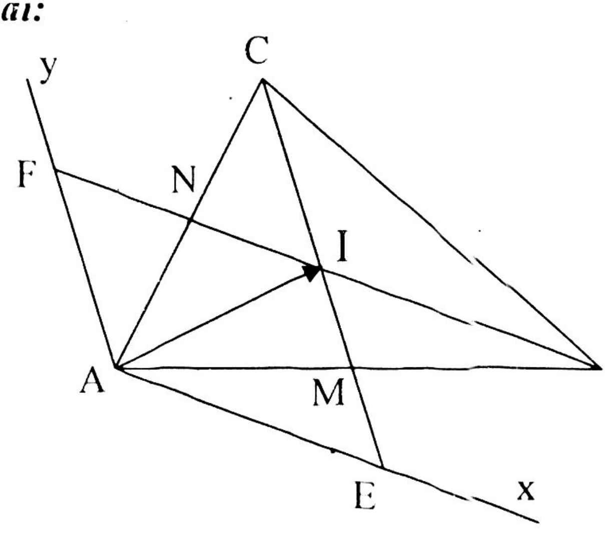
Dựng Ax song song BN cắt CM tại E

Dựng Ay song song CM cắt BN tại F

Khi đó, ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

Mặt khác, ΔMAE ~ ΔMBI

Nên $\frac{AE}{IB} = \frac{MA}{MB} = a$



Suy ra $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{IB}$

Tương tự $\Delta NAF \sim NCI$

nên $\overrightarrow{AF} = b\overrightarrow{IC}$

Từ đó suy ra: $\overrightarrow{AI} = a\overrightarrow{IB} + b\overrightarrow{IC}$.

DẠNG 2: BIỂU THỊ MỘT VECTƠ THEO HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

Phương pháp:

Sử dụng quy tắc ba điểm phối hợp với các tính chất của các phép toán vectơ để biểu thị vectơ cần biểu diễn theo hai vectơ không cùng phương cho trước.

Bài 1: *Cho hình bình hành ABCD tâm O. Đặt* $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$. *Hãy biểu diễn các vectơ* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ *và* $\overrightarrow{DA}$ *theo hai vectơ* $\vec{a}, \vec{b}$.

Giải:

Ta có:
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{a} - \vec{b}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b} + \vec{a}$$
$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$
$$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} = -\vec{b} - \vec{a}$$

Bài 2: *Cho ΔABC có trọng tâm là G. H là điểm đối xứng của B qua G. Gọi M là trung điểm của BC. Đặt* $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. *Biểu thị các vectơ* $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CH}$ *và* $\overrightarrow{MH}$, *theo* $\vec{b}$ *và* $\vec{c}$.

Giải:

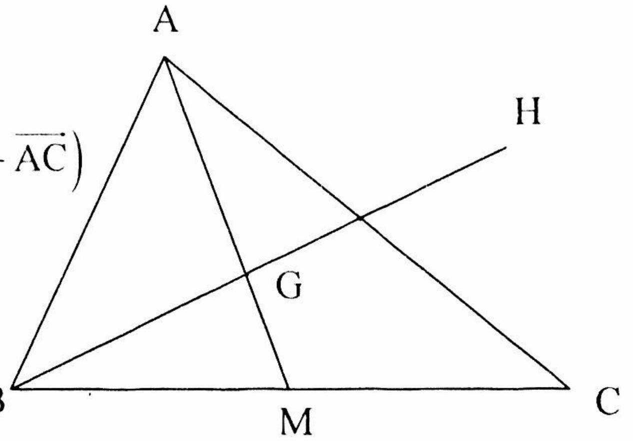
Ta có: $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG}$

Suy ra: $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AM}$

$$= -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

Vậy $\overrightarrow{AH} = -\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$



Tương tự: $\overrightarrow{CH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CH}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) - \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = -\frac{5}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}.$$

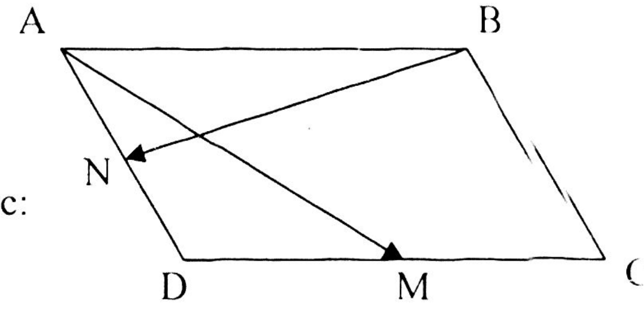
Bài 3: *Cho hình bình hành ABCD có M, N là trung điểm của các cạnh DC, DA. đặt* $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BN} = \vec{b}$. *Biểu diễn các vectơ* $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}$ *theo 2 vectơ* $\vec{a}, \vec{b}$.

Giải:

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

Từ đó: $\begin{cases} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} \\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} \end{cases}$



Giải hệ phương trình này ta được:

$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

Như vậy: $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\vec{a} - \frac{4}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = -\frac{4}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{6}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$$

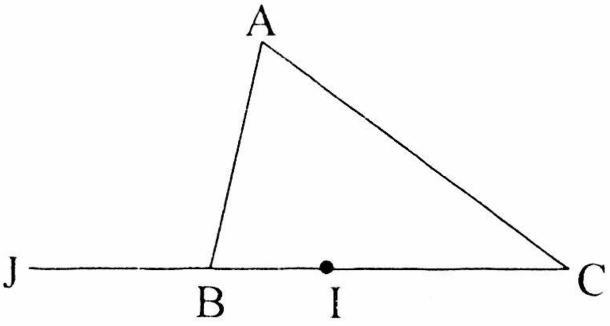
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}.$$

Bài 4: *Cho ΔABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$, gọi J là điểm phần kéo dài của cạnh BC sao cho $5JB = 2JC$.*

a. Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$

Giải:



a. Vì I nằm trên cạnh BC và $2CI = 3BI$

Nên $2\overrightarrow{CI} + 3\overrightarrow{BI} = \vec{0}$

$$\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}\right) + 3\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}\right)$$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

Vì J nằm trên phần kéo dài của cạnh BC và $5JB = 2JC$ nên $5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}$

$$\Rightarrow 5\left(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}\right) = 2\left(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

b. Theo kết quả trên ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ} \end{cases}$

Ta lại có: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ (Với M là trung điểm của BC)

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{8}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AJ}+\frac{25}{16}\overrightarrow{AI}-\frac{9}{16}\overrightarrow{AJ}\right)$$

$$= \frac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$$

B. BÀI TẬP

Bài 1: Cho các điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng

a. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

b. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

Bài 2: Cho 4 điểm A, B, C, D tuỳ ý. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, AD và BC. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}$

b. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$.

Bài 3: Cho ΔABC, bên ngoài ΔABC ta vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{O}$

Bài 4: Cho ΔABC có I là trung điểm BC. Trên 2 cạnh AB, AC lấy các điểm D, E sao cho DA = 2DB; EC = 3EA. Gọi J là trung điểm của DE. Chứng minh rằng

a. $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$.

Bài 5: Cho M nằm trên đường thẳng AB, N nằm trên đường thẳng CD sao cho $n\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{MB}$ và $n\overrightarrow{CN}=m\overrightarrow{ND}$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MN}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BD}.$$

Bài 6: Cho ΔABC. Gọi I, J, K là các điểm xác định bởi $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$; $2\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{JA}=\vec{0}$; $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}=\vec{0}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và IJK có cùng trọng tâm.

Bài 7: Cho I, J là trung điểm của đoạn AB, CD. M, N là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{NB}+k\overrightarrow{ND}=\vec{0}$ $(k\neq -1)$. Gọi O là trung điểm của đoạn MN

a. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NB}\right)$; $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ND}\right)$;

$\overrightarrow{OI}+k\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$

b. Gọi P, Q là các điểm sao cho $\overrightarrow{PA}+k\overrightarrow{PD}=\vec{0}$, $\overrightarrow{QB}+k\overrightarrow{QC}=\vec{0}$. Chứng minh O là trung điểm của PQ

Bài 8: Cho ΔABC và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh. Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Bài 9: Cho ΔABC có các cạnh BC = a, CA = b; AB = c. Gọi AM, BN; CP lần lượt là các đường phân giác trong của tam giác đó. Chứng minh rằng:

$$a(b+c)\overrightarrow{AM}+b(c+a)\overrightarrow{BN}+c(a+b)\overrightarrow{CP}=\vec{0}d$$

Bài 10: Cho ΔABC. Gọi H là trực tâm của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\text{tg}A.\overrightarrow{HA}+\text{tg}B.\overrightarrow{HB}+\text{tg}C.\overrightarrow{HC}=\vec{0}$$

Bài 11: Cho ΔABC, N là điểm sao cho $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. G là trọng tâm ΔABC. Biểu thị $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$

Bài 12: Cho ΔABC có D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB. Đặt $\overrightarrow{BE}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CF}=\vec{b}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{AD}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$

Bài 13: Cho ΔABC, I là điểm trên phần kéo dài của AB sao cho IA = 2IB, J là điểm nằm trên cạnh AC sao cho 3JA = 2JC. Biểu thị vectơ IJ theo $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ và $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$

Bài 14: Cho hình bình hành ABCD tâm O. I là trung điểm của BO. G là trọng tâm ΔOCD. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{BG}$ theo $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

Bài 15: Cho ΔABC. Gọi H là điểm đối xứng của trọng tâm G qua B

a. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{HA}-5\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

b. Đặt $\overrightarrow{AG}=\vec{a}; \overrightarrow{AH}=\vec{b}$. Tính $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 16: Cho lục giác đều ABCDEF. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB}; \vec{v}=\overrightarrow{AF}$. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{DF}$ theo $\vec{u}$ và $\vec{v}$

Bài 17: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, E, F là các điểm sao cho $\overrightarrow{AM}=p\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN}=p\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AE}=q\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BF}=q\overrightarrow{BC}$. MN cắt EF tại O. Tính $\overrightarrow{EF}$ theo $\overrightarrow{EM}$ và $\overrightarrow{EN}$.

Bài 18: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M, N là các điểm nằm trên đoạn AB và CD sao cho $AM = \frac{1}{3}AB, CN = \frac{1}{2}DC$

a. Tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$

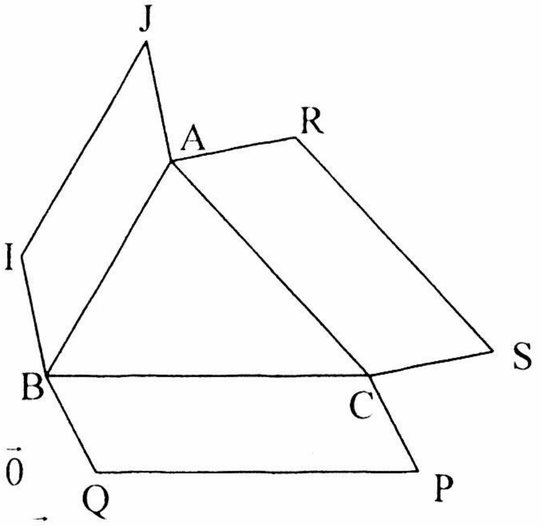
b. Gọi G là trọng tâm ΔMNB. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$

c. Gọi I, J lần lượt là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{BI} = m\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AJ} = n\overrightarrow{AI}$. Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$ và m, n

d. Xác định m để AI đi qua G

e. Xác định m, n để J là trọng tâm ΔBMN.

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ



Bài 1

Bạn đọc tự giải.

Bài 2

Bạn đọc tự giải.

Bài 3

Ta có $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SR}=\vec{0}$

Suy ra: $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

Do đó: $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$

Như vậy: $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$ vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Bài 4

Bạn đọc tự giải (tương tự bài mẫu 7).

Bài 5

Áp dụng kết quả bài mẫu 8 ta có:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OC}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OD}$$

Mà $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{n}{m+n}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)+\frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)$

Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BD}$.

Bài 6

Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm 2 tam giác ABC và IJK

Khi đó: $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GB}\right)+3\left(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=5\overrightarrow{GI}$$

Tương tự ta có: $2\overrightarrow{GC}+3\overrightarrow{GA}=5\overrightarrow{GJ}$

$$2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=5\overrightarrow{GK}$$

Do vậy: $5\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=5\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'I}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'J}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'K}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{G'I}+\overrightarrow{G'J}+\overrightarrow{G'K}\right)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'}=\vec{0} \text{ hay } G \equiv G' \text{ (đpcm)}$$

Bài 7

a. Ta có: $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NB}\right)$

Tương tự: $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ND}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{OI}+k\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NB}+k\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{ND}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NB}+k\overrightarrow{ND}\right)=\vec{0}$$

b. Ta có: $\overrightarrow{PA}+k\overrightarrow{PD}=\vec{O}\Rightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}+k\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OP}\right)=\vec{0}$

$$\Rightarrow (k+1)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OD}$$

Tương tự: $\overrightarrow{QB}+k\overrightarrow{QC}=\vec{O}\Rightarrow (k+1)\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}$

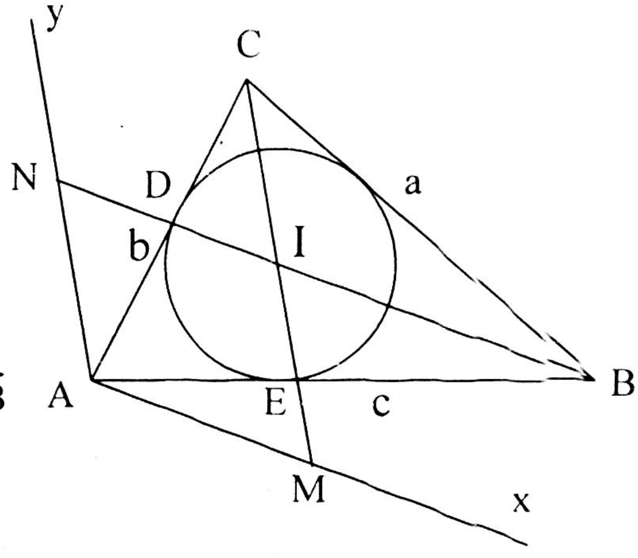
Từ đó suy ra: $(k+1)\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right)=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+k\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\right)$

$$=2\overrightarrow{OI}+2k\overrightarrow{OJ}=2\left(\overrightarrow{OI}+k\overrightarrow{OJ}\right)=\vec{O}\Rightarrow \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\vec{0}$$

Vậy O là trung điểm của PQ

Bài 8

Gọi D và E lần lượt là chân các đường phân giác của ΔABC kẻ từ B và C. Dựng Ax song song BD cắt CE và M. Dựng Ay song song CE cắt BD và N



Ta có: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$

Mặt khác: ΔEAM ~ ΔEBI

Suy ra: $\frac{EA}{EB}=\frac{AM}{BI}$

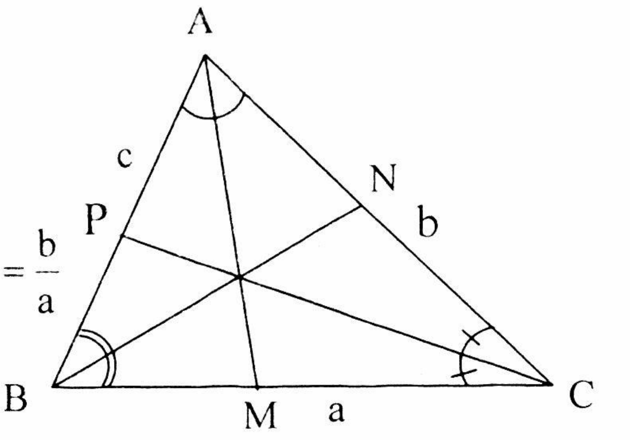
Hơn nữa, $\frac{EA}{EB}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$

Do đó: $\frac{AM}{BI}=\frac{b}{a}\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{b}{a}\overrightarrow{IB}$

Tương tự: $\overrightarrow{AN}=\frac{c}{a}\overrightarrow{IC}$

Từ đó suy ra : $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a}\overrightarrow{IB} + \frac{c}{a}\overrightarrow{IC}$

Vậy $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.



Bài 9

Ta có: $\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}$; $\frac{NC}{NA} = \frac{a}{c}$; $\frac{PA}{PB} = \frac{b}{a}$

Áp dụng kết quả bài 5 ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

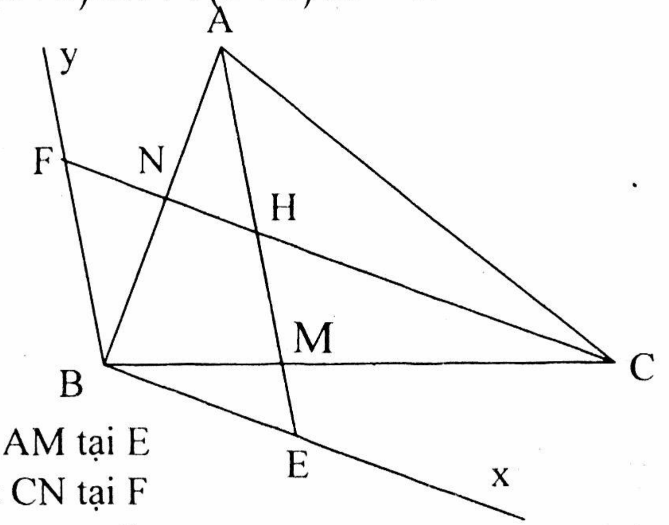
Suy ra $(b+c)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ hay $a(b+c)\overrightarrow{AM} = ab\overrightarrow{AB} + ac\overrightarrow{AC}$

Tương tự ta có:

$\overrightarrow{BN} = \frac{a}{a+c}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{a+c}\overrightarrow{BC} \Rightarrow b(a+c)\overrightarrow{BN} = ab\overrightarrow{BA} + bc\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CP} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB} \Rightarrow c(a+b)\overrightarrow{CP} = ca\overrightarrow{CA} + cb\overrightarrow{CB}$

Từ đó suy ra: $a(b+c)\overrightarrow{AM} + b(a+c)\overrightarrow{BN} + c(a+b)\overrightarrow{CP} = \vec{0}$.



Bài 10

Ta có: $tgB = \frac{AM}{MB}$; $tgC = \frac{AM}{MC}$

Suy ra: $\frac{tgC}{tgB} = \frac{MB}{MC}$

Tương tự: $\frac{tgA}{tgB} = \frac{NB}{NA}$

Dựng Bx song song với NC cắt AM tại E

Dựng By song song với MA cắt CN tại F

Ta có: $\frac{BE}{HC} = \frac{MB}{MC} = \frac{tgC}{tgB} \Rightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{tgC}{tgB}\cdot\overrightarrow{HC}$

Tương tự: $\frac{BF}{HA} = \frac{NB}{NA} = \frac{tgA}{tgB} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \frac{tgA}{tgB}\cdot\overrightarrow{HA}$

Mặt khác: $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} = \frac{tgC}{tgB}\overrightarrow{HC} + \frac{tgA}{tgB}\overrightarrow{HA}$

Suy ra: $tgB.\overrightarrow{HB} + tgC.\overrightarrow{HC} + tgA.\overrightarrow{HA} = \vec{0}$ (đpcm).

Bài 11

ĐS: $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Bài 12

ĐS: $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = -\vec{a} - \vec{b}$

Hướng dẫn: Sử dụng kết quả $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

Suy ra: $\overrightarrow{AD} = -\vec{a} - \vec{b}$

Tính $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{GB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} = -\frac{2}{3}\vec{a}$

$\overrightarrow{GC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{GF} = -\frac{2}{3}\vec{b}$

Từ đó suy ra: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.

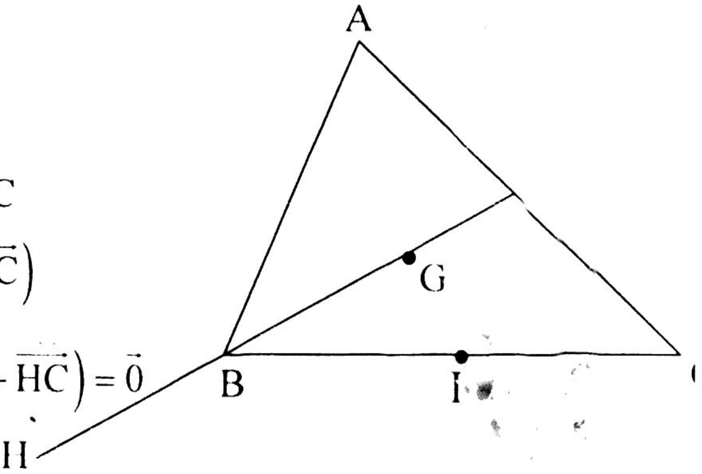
Bài 13

ĐS: $\overrightarrow{IJ} = -2\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$.

Bài 14

ĐS: $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$; $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$.

Bài 15



a. Ta có: $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Suy ra: $2\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HG} = \vec{0}$

Vì G là trọng tâm của ΔABC

Nên $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}\right)$

Từ đó: $2\overrightarrow{HB} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}\right) = \vec{0}$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

hay $\overrightarrow{HA} - 5\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$

b. Từ (a) suy ra $\overrightarrow{HA} - 5\left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

Do đó: $5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AH} = 3\vec{b}$

Mặt khác, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} = 2.\frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = 3\vec{a}$ (I là trung điểm của BC)

Như vậy: $\begin{cases} 5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 3\vec{b} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\vec{a} \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \\ \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(5\vec{a} - \vec{b}\right). \end{cases}$

Bài 16

ĐS: $\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$; $\overrightarrow{DE} = -\vec{u}$

$\overrightarrow{EF} = -\vec{u} - \vec{v}$; $\overrightarrow{AC} = 2\vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{AD} = 2\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$

$\overrightarrow{AE} = \vec{u} + 2\vec{v}$; $\overrightarrow{BD} = \vec{u} + 2\vec{v}$; $\overrightarrow{BE} = 2\vec{v}$

$\overrightarrow{BF} = -\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{CF} = -2\vec{u}$; $\overrightarrow{DF} = -2\vec{u} - \vec{v}$.

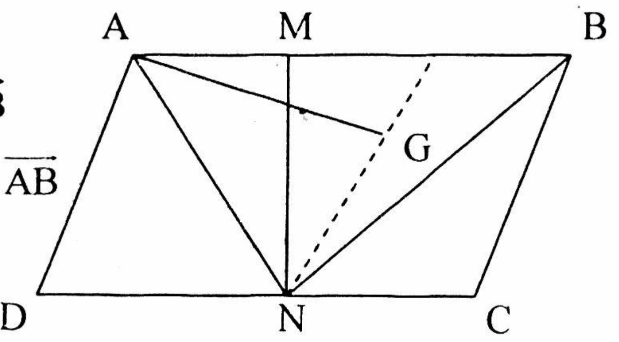
Bài 17

a. Ta có: $2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$

Mà $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Vậy $2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Do đó: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



b. Ta có: $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

$= \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

c. Ta có: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+m\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$$=\left(1-m\right)\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}=\left(1-m\right)\vec{a}+m\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AJ}=n\overrightarrow{AI}=n\left(1-m\right)\vec{a}+nm\vec{b}$$

d. Để AI qua G thì $\overrightarrow{AI}\,//\,\overrightarrow{AG}$

Suy ra: $\dfrac{5}{18}m=\dfrac{1}{3}\left(1-m\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{6}{11}$

e. Để J là trọng tâm ΔABM thì $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AJ}$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{18}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}=n\left(1-m\right)\vec{a}+nm\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{5}{18}-n\left(1-m\right)\right]\vec{a}+\left[\frac{1}{3}-mn\right]\vec{b}=\vec{0}$$

Suy ra: $\begin{cases}5-18n\left(1-m\right)=0\\1-3mn=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{6}{11}\\n=\dfrac{11}{18}.\end{cases}$

Chương II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Góc giữa 2 vectơ

Cho 2 vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$; $\vec{b} \neq \vec{0}$. *Lấy một điểm O tuỳ ý. Vẽ* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. *Góc AOB được gọi là góc giữa 2 vectơ* $\vec{a}, \vec{b}$ *kí hiệu* $(\vec{a}, \vec{b})$

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0$ *thì ta nói hai vectơ* $\vec{a}, \vec{b}$ *vuông góc với nhau và kí hiệu* $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

a. Định nghĩa

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *là một số, kí hiệu* $\vec{a}.\vec{b}$ *và được xác định như sau:* $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$

Nhận xét. Với $\vec{a}$ *ta có:* $\vec{a}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{a} = 0$

* *Nếu* $\vec{a} = \vec{b}$, *khi đó* $\vec{a}.\vec{a}$ *kí hiệu* $\vec{a}^2$ *gọi là bình phương vô hướng của vectơ* $\vec{a}$

* *Ta có* $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

b. Tính chất của tích vô hướng

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *và số k ta có:*

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$
- $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}(k\vec{b})$
- $\vec{a}^2 \geq 0; \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$

B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍCH VÔ HƯỚNG

Phương pháp:

1. Bài toán 1: *Tính tích vô hướng của các vectơ. Sử dụng các công thức:*

* $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|.\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

* *Các tính chất của phép toán tích vô hướng của hai vectơ và các hằng đẳng thức về tích vô hướng như:*

$$\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 \pm 2\vec{a}.\vec{b}\,; \qquad (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

* $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b}'$ *Trong đó* $\vec{b'}$ *là hình chiếu của* $\vec{b}$ *lên giá của* $\vec{a}$

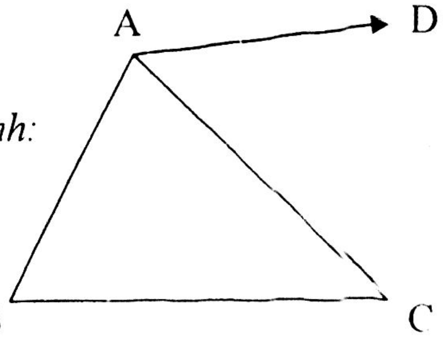
2. Bài toán 2: *Chứng minh các đẳng thức về tích vô hướng. Sử dụng:*

* *Định nghĩa và tính chất của tích vô hướng phối hợp với các quy tắc về các phép toán vectơ*

* *Công thức hình chiếu*

* *Đối với các đẳng thức có liên quan đến độ dài thì chú ý:*

$$\overrightarrow{AB}^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2$$



Bài 1: *Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Tính:*

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

Giải:

a. Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$

$$= AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a.a.\cos60^0 = \frac{a^2}{2}$$

Dựng $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$$

$$= AB\ .\ AD\ .\ \cos120^0 = a.a.\cos120^0 = -\frac{a^2}{2}$$

Ta có thể tính tương tự như trên hoặc sử dụng quy tắc 3 điểm

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right).\left(-\overrightarrow{AC}\right) = -\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= -a^2 + \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{2}.$$

b. Áp dụng kết quả trên ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2}$$

Suy ra: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = 3\left(-\frac{a^2}{2}\right) = -\frac{3a^2}{2}$

Cách khác: Ta có thể tính trực tiếp không dựa vào kết quả câu a

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Suy ra: $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)^2 = 0$

Do đó: $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 + 2\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}\right) = 0$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{2} = -\frac{3a^2}{2}.$

Bài 2: *Cho ΔABC với $AB = 5cm$; $BC = 7cm$; $CA = 8cm$*

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Suy ra số đo cua góc A

b. Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$. từ đó suy ra $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$ với D là điểm nằm trên cạnh CA sao cho CD = 4cm

Giải:

a. Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Suy ra: $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

Vậy: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} = \frac{64 + 25 - 49}{2} = 20$

Mặt khác: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) = AC.AB.\cos A$

Suy ra: $\cos A = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{AC.AB} = \frac{20}{8.5} = \frac{1}{2}$

Do đó: $\widehat{A} = 60^o$

b. Tương tự ở trên ta có:

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2} = \frac{64 + 49 - 25}{2} = 44$$

Suy ra: $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \dfrac{44}{8.7} = \dfrac{11}{14}$

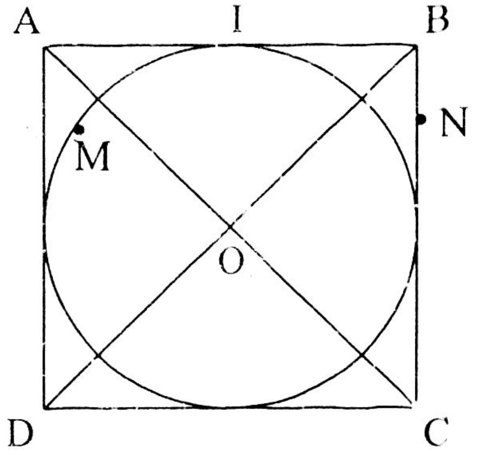
Mà D nằm trên cạnh CA nên $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$

Do vậy $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{CD}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}\right) = 4.7.\dfrac{11}{14} = 22.$

Bài 3: *Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. M là điểm tuỳ ý trên đường nội tiếp hình vuông và N là điểm tuỳ ý trên cạnh BC. Tính:*

a. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$

b. $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{BA}$.



Giải:

a. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\right)$$

$$= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$$

$$= 2MO^2 + \overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$$

$= 2MO^2 = \dfrac{a^2}{2}$ (vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ và $OA \perp OB$; $OC \perp OD$ nên $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = 0$)

b. Ta có: $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = -AB^2 = -a^2$

$\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{2}a.a = \dfrac{a^2}{2}$ (với I là trung điểm của AB)

Bài 4: *Cho 4 điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng:*

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ *(hệ thức Euler). Suy ra 3 đường cao của một tam giác thì đồng quy*

b. $AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2 = 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

Giải:

a. Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$$

Gọi H là giao điểm của 2 đường cao xuất phát từ B và C của ΔABC. Khi đó áp dụng hệ thức Euler đối với 4 điểm H, A, B, C ta có:

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BA}$$

Ta có: $HB \perp CA,\ HC \perp BA$

Nên $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BA}=0$

Suy ra: $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0$

Do đó $HA \perp BC$ hay HA là đường cao của ΔABC

Vậy 3 đường cao ΔABC đồng quy tại một điểm

b. Ta có: $AD^2+BC^2-AC^2-BD^2=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BD}^2$

$$=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}\right)$$

$$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}).\overrightarrow{DC}$$

$$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}).\overrightarrow{CD}$$

$$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}).\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CD}$$

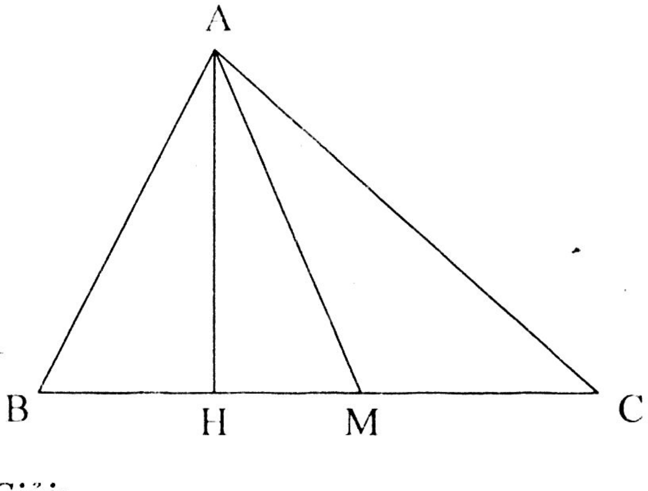
$$=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}.$$

Bài 5: *Cho ΔABC có AM, AH lần lượt là trung tuyến và đường cao của tam giác ứng với cạnh BC. Chứng minh rằng:*

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}^2-\frac{BC^2}{4}$

b $AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$

c. $AB^2-AC^2=2\overline{BC}.\overline{MH}$



Giải:

a. Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$

$$=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB})$$

$$=\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{MB}^2=AM^2-\frac{BC^2}{4}.$$

b. Ta có: $AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2$

$$= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})^2$$

$$= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB})^2$$

$$= 2\overrightarrow{AM}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = 2AM^2 + 2MB^2$$

$$= 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

c. $AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2$

$$= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB}.2.\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{HM} = 2\overline{BC}.\overline{MH}$$

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH ĐIỂM HAY TẬP HỢP ĐIỂM THOẢ MÃN ĐẲNG THỨC VECTƠ CHO TRƯỚC

Phương pháp:

1. Xác định điểm M thoả mãn một đẳng thức vectơ cho trước:

– Ta biến đổi đẳng thức vectơ cho trước về dạng $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ *trong đó điểm O và vectơ* $\vec{v}$ *đã biết.*

– Khi đó điểm M hoàn toàn xác định.

2. Xác định tập hợp điểm M thoả mãn đẳng thức vectơ cho trước. Ta có thể biến đổi đẳng thức đã cho về một trong các dạng:

– Nếu $\left|\overrightarrow{AM}\right| = R$ *(R là hằng số) thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính R. (Nếu R > 0); M ≡ A (Nếu R = 0); Là tập rỗng (Nếu R < 0).*

– Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right| = k\left|\overrightarrow{BC}\right|$ *(A, B, C cho trước) thì tập hợp điểm M là đường tròn tâm A, bán kính bằng k.BC.*

– Nếu $\left|\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}\right|$ *với A, B cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.*

– Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$ *(A, B, C cho trước) thì tập hợp điểm M là:*

+ Đường thẳng qua A song song với BC nếu k ∈ R.

+ Nửa đường thăng qua A song song với BC theo hướng $\overrightarrow{BC}$ *với* $k \in R^+$.

+ Nửa đường thăng qua A song song với BC theo hướng ngược với $\overrightarrow{BC}$ *với* $k \in R^-$.

3. Xác định tập hợp điểm thoả mãn đẳng thức của tích vô hướng

- Ta có thể biến đổi đẳng thức tích vô hướng đã cho về một trong các dạng (ngoài những trường hợp trên).

- Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ *(A, B cố định) thì M thuộc đường tròn đường kính AB*

- Nếu $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{AB}=0$ *(H cố định,* $\overrightarrow{AB}$ *vectơ không đổi) thì tập hợp M là đường thẳng Δ qua H vuông góc AB.*

Bài 1: *Cho ΔABC*

a. Xác định điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

b. Xác định điểm N thoả mãn $\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$

c. Xác định điểm P thoả mãn $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}$ *(với K là điểm tuỳ ý).*

Giải:

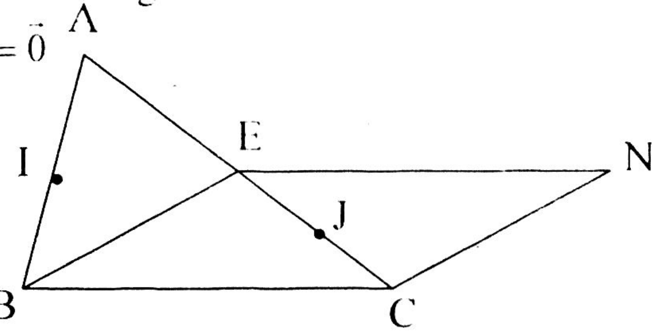
a. Gọi I là trung điểm của AB; J là trung điểm của CI

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\ 4\overrightarrow{MJ}=\vec{0}$

Do đó: J ≡ M



b. Gọi E là trung điểm của AC

Ta có $\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\ (\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CA})-2(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CB})+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB})$

$\Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{CN}=(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})+2\overrightarrow{BC}\ \Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BE}$ hay $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BE}$

c. Ta có: $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}$

$=\ \overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CA}+2(\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CB})-3\overrightarrow{KC}$

$=\ \overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

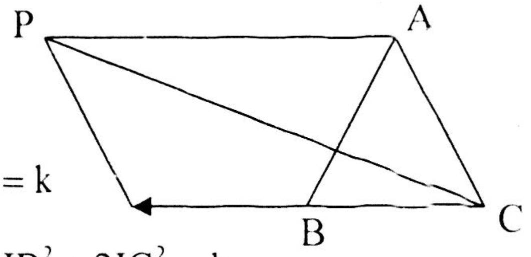
(Vì A, B, C cho trước nên $\vec{a}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$ xác định. Vậy tập hợp P thoả $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$.

Bài 2: *Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a.*

a. *Tìm tập hợp điểm M thoả mãn* $MB^2 + 2MC^2 = k$ *(1)*

b. *Tìm tập hợp điểm N thoả mãn* $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NC}.\overrightarrow{NA} = \frac{5a^2}{2}$.

Giải:



a. Ta có: $MB^2 + 2MC^2 = k(1)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MC}^2 = k$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right) = k$$

$$\Leftrightarrow 3MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}\right) + IB^2 + 2IC^2 = k$$

Gọi I là điểm sao cho $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ và $IC = \frac{a}{3}; IB = \frac{2a}{3}$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow -3MI^2 = IB^2 + 2IC^2 - k$

Suy ra: $MI^2 = \frac{3k - 2a^2}{9}$

Vậy:

+ Nếu $3k - 2a^2 < 0 \Leftrightarrow k < \frac{2}{3}a^2$, khi đó tập hợp trên M là tập rỗng.

+ Nếu $3k - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}a^2$, khi đó $M \equiv I$

+ Nếu $3k - 2a^2 > 0 \Leftrightarrow k > \frac{2}{3}a^2$, khi đó tập hợp M là đường tròn tâm I, bán kính R= $\frac{1}{3}\sqrt{3k - 2a^2}$.

b. Gọi G là trọng tâm ΔABC

Ta có: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NG}$

Suy ra

$$NA^2 + NB^2 + NC^2 + 2(\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NC}.\overrightarrow{NA}) = 9NG^2$$

Khi đó:

$$\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NC}.\overrightarrow{NA} = \frac{9NG^2 - \left(NA^2 + NB^2 + NC^2\right)}{2}$$

Mặt khác: $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GA}$

$$\Rightarrow\quad NA^2 = NG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{NG}.\overrightarrow{GA}$$

Tương tự: $NB^2 = NG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{NG}.\overrightarrow{GB}$

$NC^2 = NG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{NG}.\overrightarrow{GC}$

Suy ra: $NA^2 + NB^2 + NC^2 = 3NG^2 + 3GA^2 + 2\overrightarrow{NG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

(vì GA = GB = GC)

$$= 3NG^2 + 3\left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3NG^2 + a^2$$

Từ đó: $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NC}.\overrightarrow{NA} = \dfrac{9NG^2 - 3NG^2 - a^2}{2}$

$$= 3NG^2 - \frac{a^2}{2}$$

Mà $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NC}.\overrightarrow{NA} = \dfrac{5a^2}{2}$

Nên $3NG^2 - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{5a^2}{2} \Rightarrow NG^2 = a^2$ hay $GN = a$

Vậy tập hợp điểm N là đường tròn tâm G bán kính là a.

Bài 3: *Cho tứ giác ABCD.*

a. Xác định điểm O sao cho $\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$ *(1)*

b. Tìm tập hợp điểm M thoả hệ thức $\left|\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right| = \left|3\overrightarrow{MA}\right|$ *(2)*

Giải:

a. Ta có: $\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} + 4(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}) = 2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD})$

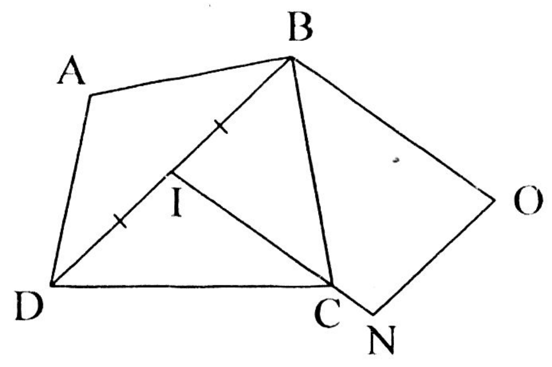
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{BD} - 4\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OB} = 2(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) - 2\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{CI}$ (I là trung điểm BO)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{CI}$



Vậy O là đỉnh của hình bình hành IBON với:

$\overrightarrow{IN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{IC}$

b. Ta có $\left|\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right| = \left|3\overrightarrow{MA}\right|$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + 4(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})\right| = \left|3\overrightarrow{MA}\right|$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD}\right| = \left|3\overrightarrow{MA}\right|$.

$\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MO}\right| = \left|3\overrightarrow{MA}\right|$ vì $\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Do đó $\left|\overrightarrow{MO}\right| = \left|\overrightarrow{MA}\right| \Leftrightarrow MO = MA$

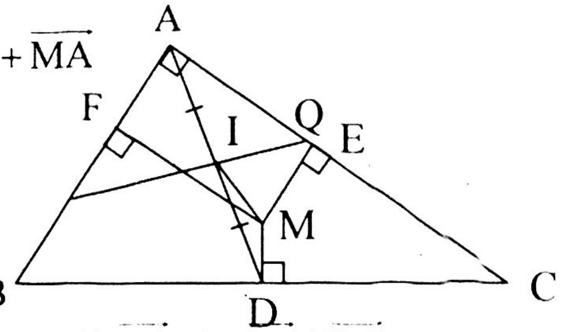
Vậy tập hợp M là đường trung trực của đoạn thẳng OA.

Bài 4: *Cho ΔABC vuông tại A. Điểm M bất kì nằm trong tam giác có hình chiếu xuống BC, CA, AB theo thứ tự là D, E, F*

a. Tìm tập hợp điểm M biết rằng $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$ *cùng phương với* $\overrightarrow{BC}$.

b. Tìm tập hợp các điểm M biết rằng $\left|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right| = \left|\overrightarrow{MA}\right|$.

Giải:



a. Ta có: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA}$

Gọi I là trung điểm của AD

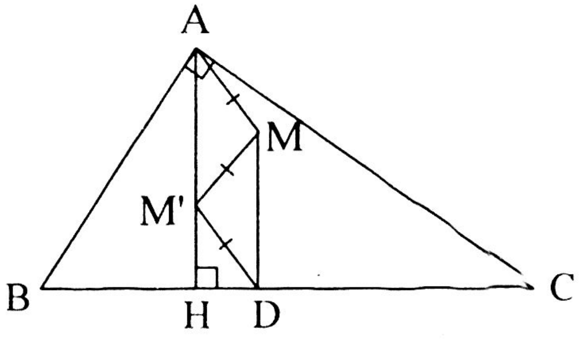
Khi đó: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MI}$

Vậy $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{MI}$

Để $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$ thì $\overrightarrow{MI} // \overrightarrow{BC}$

Suy ra: $\overrightarrow{MI} // \overrightarrow{PQ}$ ($\overrightarrow{PQ}$ là đường trung bình của tam giác ABC song song với cạnh BC).

Do đó tập hợp M là đoạn PQ.



b. Gọi M' là điểm trên đường cao AH sao cho AM' = MD tức là AMDM' là hình bình hành.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right|$

$= \left|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MA}\right|$

Suy ra: $\left|\overrightarrow{MM'}\right| = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{M'D}\right|$

Vậy M là đường trung trực của MD và vì $M'H = \frac{1}{2}\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}M'A$ nên $MD = \frac{2}{3}AH$.

Tóm lại M nằm trên đường thẳng song song với BC, cách BC một khoảng bằng $\frac{2}{3}AH$ nhưng trừ những điểm nằm phía ngoài ΔABC.

Bài 5: *Cho điểm A, B cố định với AB = a.*

a. Tìm tập hợp điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB} = a^2$

b. Tìm tập hợp điểm N thoả: $MA^2 + 2MB^2 = k$ *(k là hằng số thực dương).*

Giải:

a. Ta có: $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB} = a^2$

⇔ $\overrightarrow{MA}^2 + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AB} = a^2$

⇔ $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = a^2$

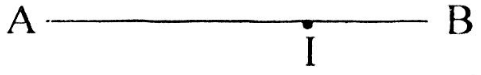
⇔ $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 0$ ⇔ $\overrightarrow{MA}^2.\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = 0$

⇔ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AB.

b. Gọi I là điểm sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ vì A, B, cố định nên I cố định

Ta có: $NA^2 + 2NB^2 = k$



⇔ $\overrightarrow{NA}^2 + 2\overrightarrow{NB}^2 = k$

⇔ $(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$

⇔ $NI^2 + 2\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + 2NI^2 + 4\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IB} + 2IB^2 = k$

⇔ $3\overrightarrow{NI}^2 + 2\overrightarrow{NI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB})IA^2 + 2IB^2 = k$

⇔ $3NI^2 = k^2 - (IA^2 + 2IB^2)$

⇔ $NI^2 = \frac{1}{3}\left(k^2 - 6IB^2\right)$

⇔ $NI^2 = \frac{1}{3}\left(k^2 - \frac{2a^2}{3}\right)$ (vì $IB = \frac{1}{3}AB$)

Vậy: + Nếu $k > \frac{2a^2}{3}$ thì tập hợp điểm N là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{1}{3}\sqrt{k^2 - \frac{2a^2}{3}}$.

+ Nếu $k = \frac{2a^2}{3}$ thì tập hợp điểm N chính là I.

+ Nếu $0 < k < \frac{2a^2}{3}$ thì tập hợp điểm N là tập rỗng.

Bài 6: *Cho ΔABC đều cạnh bằng a.*

a. *Tìm tập hợp điểm M thoả:* $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$

b. *Tìm tập hợp điểm N thoả:* $NA^2 + NB^2 + NC^2 = 4a^2$

c. *Tìm tập hợp điểm P thoả:* $3PA^2 = 2PB^2 + PC^2$

Giải:

a. Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm AC. ta có I, J cố định

Ta có: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.2\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ

b. Gọi G là trọng tâm ΔABC

Ta có: $NA^2 + NB^2 NC^2 = 4a^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{BG}\right)^2 + \left(\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 4a^2$

$\Leftrightarrow 3NG^2 + \overrightarrow{NG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 4a^2$

$\Leftrightarrow 3NG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 4a^2$

Trong đó: $GA = GB = GC = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $3NG^2 = 3a^2 \Leftrightarrow NG^2 = a^2$

Do đó tập hợp điểm N là đường tròm tâm G bán kính bằng a.

c. Ta có: $3PA^2 = 2PB^2 + PC^2$

$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA})^2 = 2(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GC})^2$

$\Leftrightarrow 3PG^2 + 6\overrightarrow{PG}.\overrightarrow{GA} + 3GA^2$

$\Leftrightarrow 2PG^2 + 4\overrightarrow{PG}.\overrightarrow{GB} + 2GB^2 + PG^2 + 2\overrightarrow{PG}.\overrightarrow{GC} + GC^2$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{PG}.\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{PG}.\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{PG}.\overrightarrow{GC} = 0$

(vì GA = GB = GC)

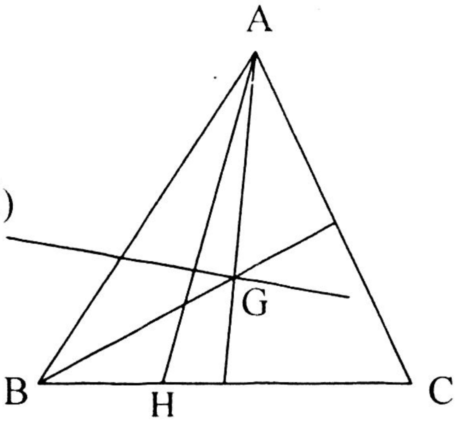
$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PG}(3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{GC}) = 0$

Mặt khác: $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$

$= 3\overrightarrow{GA} - 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC})$

$= -(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Gọi H là điểm sao cho $2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 0$



Khi đó $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = 3\overrightarrow{AH}$

Suy ra, đẳng thức đã cho trở thành $\overrightarrow{PG}.3\overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PG}.\overrightarrow{AH} = 0$

Vậy tập hợp điểm P là đường thẳng qua G và vuông góc với AH.

DẠNG 3: DÙNG PHƯƠNG PHÁP VECTƠ ĐỂ GIẢI MỘT SỐ DẠNG BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

Phương pháp:

1. Để giải một số bài toán hình học bằng phương pháp vectơ ta tiến hành:

Bước 1: – Lựa chọn một vectơ "gốc"

– Chuyển đổi giả thiết, kết luận bài toán từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ vectơ.

Bước 2: Thực hiện các phép biến đổi các biểu thức vectơ theo yêu cầu bài toán.

Bước 3: Chuyển các kết luận từ ngôn ngữ vectơ sang ngôn ngữ hình học tương ứng.

2. Một số dạng bài toán:

Bài toán 1: Chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng

– Để chứng minh A, B, C thẳng hàng ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB}$ *cùng phương với* $\overrightarrow{AC}$ *(hoặc* $\overrightarrow{AB}$ *cùng phương* $\overrightarrow{BC}$ *hoặc* $\overrightarrow{AC}$ *cùng phương với* $\overrightarrow{BC}$*), tức là chứng minh đẳng thức vectơ* $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ *với* $k \in R$.

– Ngoài ra để chứng minh A, B, C thẳng hàng ta có thể chứng minh đẳng thức vectơ $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC} + (1-k)\overrightarrow{MA}$ *với M bất kì,* $k \in R$.

– Đặc biệt nếu $0 \le k \le 1$ *thì B nằm trên đoạn AC.*

Bài toán 2: Chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy thì quy về bài toán 1 bằng cách :

– Gọi A là giao điểm của a và b

– Chứng minh A ∈ c tức là A, B, C thẳng hàng với B, C là 2 điểm nằm trên đường thẳng C.

Bài toán 3: Chứng minh AB song song với CD, ta chứng minh A, B, C, D không thẳng hàng và $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

Bài toán 4: Chứng minh AB vuông góc CD, ta chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Bài toán 5: Các dạng toán tính độ dài, tính góc thì chú ý sử dụng

$$AB = \sqrt{\left|\overrightarrow{AB}^2\right|} = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}}$$

$$Cos\ \alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}$$ *(α là góc giữa 2 vectơ* $\vec{a}, \vec{b}$*).*

Bài 1: *Cho ΔABC, lấy các điểm M, N, P sao cho:*

$$\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Giải:

Để chứng minh M, N, P thẳng hàng ta cần chứng minh $\overrightarrow{PM} = k\overrightarrow{PN}$, $k \in R$

Biểu thị $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ (hệ vectơ "gốc")

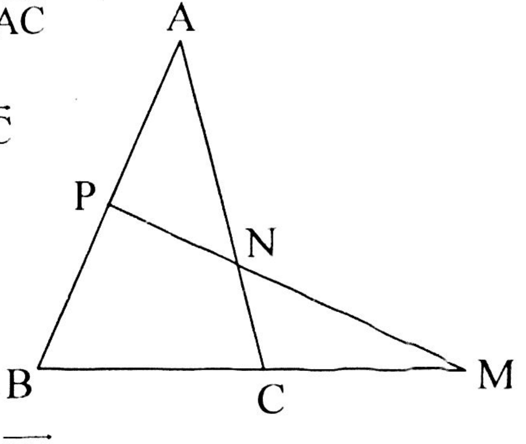
Ta có: $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

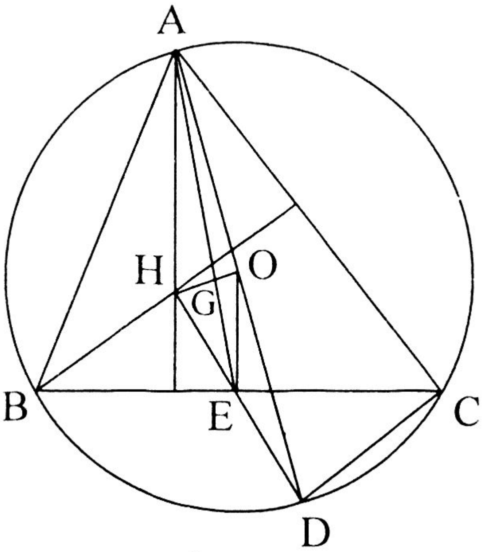
$$= 3\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = 3\overrightarrow{PN}$$



Vậy $\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{PN}$ hay M, N, P thẳng hàng

Bài 2: *Cho ΔABC, gọi O, G, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng O, G, H thẳng hàng.*

Giải:



Để chứng minh O, G, H thẳng hàng ta cần chứng minh $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OH}$, $k \in R$

Ta có: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

Gọi D là điểm đối xứng với A qua O.

E là trung điểm của BC

Ta có CD // BH vì cùng vuông góc với AC

BD // CH vì cùng vuông góc với AB

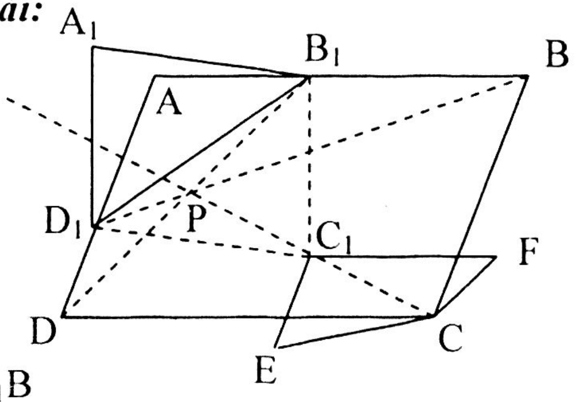
Suy ra BDCH là hình bình hành. Do đó E là trung điểm của HD

Do đó: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Như vậy $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$ hay O, G, H thẳng hàng.

Bài 3: *Cho hai hình bình hành ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ sắp xếp sao cho B_1 thuộc cạnh AB, D_1 thuộc cạnh AD. Chứng minh rằng các đường thẳng DB_1, BD_1 và CC_1 đồng quy.*

Giải:



Gọi $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

Vì A, B_1, B thẳng hàng nên:

$\overrightarrow{AB_1} = k\overrightarrow{AB}$ (1)

Vì A, D_1, D thẳng hàng nên:

$\overrightarrow{AD_1} = h\overrightarrow{AD}$ (2)

Gọi P là giao điểm của DB_1 và D_1B

Vì B_1, P, D thẳng hàng nên $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB_1} + (1-\alpha)\overrightarrow{AD}$ (3)

Vì B, P, D_1 thẳng hàng nên $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB} + (1-\beta)\overrightarrow{AD_1}$ (4)

Từ (1) và (3) suy ra $\overrightarrow{AP} = \alpha k\vec{a} + (1-\alpha)\vec{b}$

Từ (2) và (4) suy ra $\overrightarrow{AP} = \beta.\vec{a} + (1-\beta).h\vec{b}$

Vì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nên ta suy ra được $\begin{cases} \alpha k = \beta \\ 1-\alpha = (1-\beta)h \end{cases}$

Suy ra: $\alpha = \dfrac{1-h}{1-kh}$

Vậy $\overrightarrow{AP} = \dfrac{k(1-h)}{1-kh}\vec{a} + \dfrac{h(1-k)}{1-kh}\vec{b}$

Ta lại có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$

Từ đó suy ra: $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = \dfrac{1-k}{1-kh}\vec{a} + \dfrac{1-h}{1-kh}\vec{b}$

Hơn nữa, $\overrightarrow{D_1D} = (1-h)\vec{b} = \overrightarrow{C_1E}$

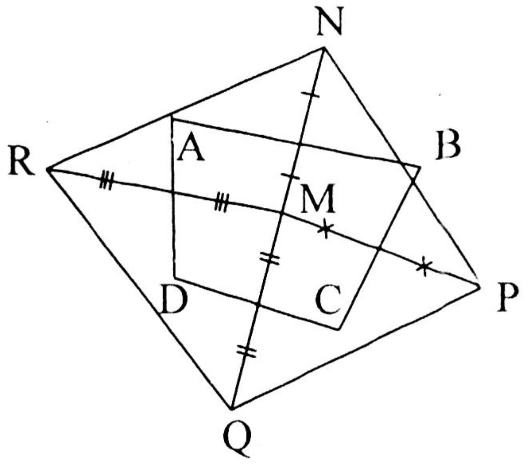
$\overrightarrow{B_1B} = (1-k)\vec{a} = \overrightarrow{C_1F}$

Suy ra: $\overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{C_1E} + \overrightarrow{C_1F} = (1-k)\vec{a} + (1-h)\vec{b}$

Vậy $\overrightarrow{C_1C} = (1-kh)\overrightarrow{PC}$. Hay C_1, C, P thẳng hàng tức là C_1C đi qua P. Do vậy DB_1, D_1B và CC_1 đồng quy tại P.

Bài 4: *Cho tứ giác ABCD và điểm M. Gọi N, P, Q, R lần lượt là các điểm đối xứng của M qua trung điểm của các cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng MPQR là hình bình hành.*

Giải:



Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MQ}$

$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MR}$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MR}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}$

$= \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DB}$

Vậy $\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{QP}$. Do đó NPQR là hình bình hành.

Bài 5: *Cho ΔABC cân tại A và D là trung điểm của cạnh BC. H là hình chiếu vuông góc của D trên cạnh AC và I là trung điểm của đoạn DH. Chứng minh rằng AI ⊥ BH.*

Giải:

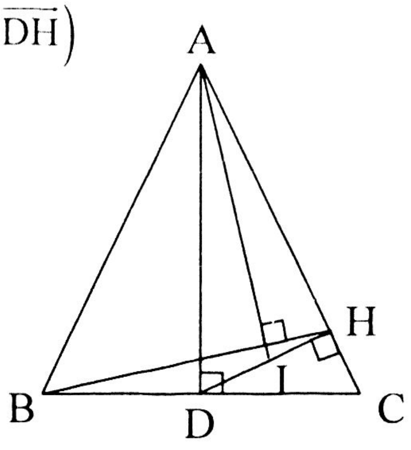
Ta có $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH}\right).\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DH}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DH}\right)$$

(vì AD ⊥ BD và AH ⊥ DH nên

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DH}=0$)



$$= \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}\right)\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DH}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AD}\right)$$

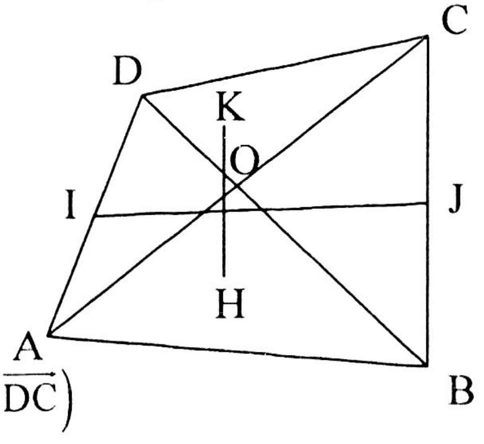
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC}=0$$

Vậy $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH}=0$ Do đó AI ⊥ BH.

Bài 6: *Cho tứ giác ABCD. Hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của ΔABO và CDO. I, J là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng HK ⊥ IJ*

Giải:



Ta có: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ}$

Suy ra: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$

Khi đó: $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OH}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{DC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{DC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CK}\right)\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}\right)\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AH}\right)\overrightarrow{OC}-\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)\overrightarrow{OA}\right]$$

(vì CK ⊥ OB; AH ⊥ OD nên $\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OD} = 0$)

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OC} - \left(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CK}\right)\overrightarrow{OA}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{DK}.\overrightarrow{OA}\right) = 0$$

Vậy HK ⊥ IJ.

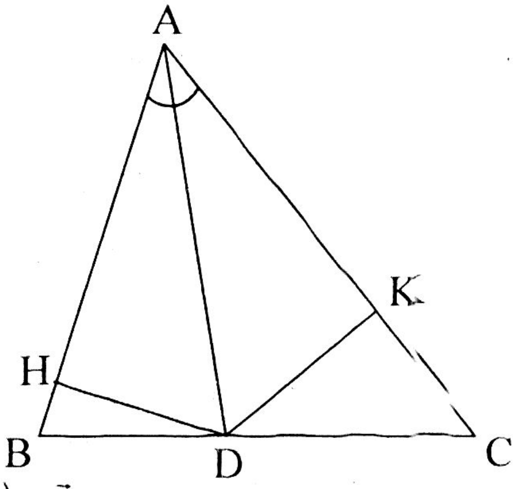
Bài 7: *Cho ΔABC và đường phân giác trong AD. Gọi H là hình chiếu của D lên AB. K là hình chiếu của D lên AC. Biết* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 2a^2$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 3a^2$; AH = a.

a. *Tính AB, AC*

b. *Tính* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ *và cosin của góc giữa 2 đường thẳng AB, AC*

c. *Tính AD và BC.*

Giải:



a. Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB.AH = 2a^2$

Suy ra: AB = 2a

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AC.AK = AC.AH$

$= 3a^2$ (vì AK = AH)

Suy ra: AC = 3a

b. $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$

Suy ra: $3\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) + 2\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}^2 = 5\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AC}^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{15a^2 - 18a^2}{3} = -a^2$

Gọi α là góc giữa AB và AC ta có:

$$\text{Cos}\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|}{AB.AC} = \frac{a^2}{2a.3a} = \frac{1}{6}.$$

c. Vì $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AD}$

Suy ra $$\begin{aligned}25AD^2 &= 9AB^2+4AC^2+12\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\ &= 36a^2+36a^2-12a^2\\ &= 60a^2\end{aligned}$$

Vậy $AD=\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$

$$\begin{aligned}BC^2=\overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=AC^2+AB^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\ &= 9a^2+4a^2+2a^2=15a^2\end{aligned}$$

Vậy $BC=a\sqrt{15}$.

C. BÀI TẬP

Bài 1: Cho ΔABC có $BC = a$; $CA = b$; $AB = C$

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

b. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Tính AG và cos của góc hợp bởi AG và BC.

Bài 2: Cho ΔABC có AB = 5cm; BC = 7cm; CA = 9cm

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ suy ra cos A

b. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

c. Tính độ dài trung tuyến AI tương ứng với cạnh BC của tam giác

d. Gọi G là trọng tâm ΔABC tính $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

e. Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A. Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ từ đó suy ra AD.

Bài 3: Cho hình thang vuông ABCD có đường cao AB = 2a; đáy lớn BC = 3a, đáy nhỏ AD = 2a. Tính:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b. $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}$ với I là trung điểm của CD.

Bài 4: Cho ΔABC có D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB. G là trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB}=0$

b. $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$ với M là điểm tuỳ ý.

Bài 5: Cho ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng:

$$AC^2 + BD^2 = 2\,(AB^2 + AD^2).$$

Bài 6: Cho tứ giác ABCD

a. Chứng minh rằng: $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

b. Suy ra điều kiện cần và đủ để tứ giác có 2 đường chéo vuông góc với nhau là $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Bài 7: Cho ΔABC, H là trực tâm tam giác. M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$ b. $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{BC^2}{2}$.

Bài 8: Cho ΔABC. Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm trên cạnh AC sao cho JC = 2JA

a. Xác định điểm M sao cho $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

b. Xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} - 5\overrightarrow{NC}$

c. Xác định điểm P sao cho $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AP} = \vec{0}$

d. Xác định điểm Q sao cho $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$.

Bài 9: Cho ΔABC; D lần lượt là trung điểm của AB và AC

a. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right|$

b. Tìm tập hợp điểm N sao cho $\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right| = \frac{3}{2}\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}\right|$

c. Tìm tập hợp điểm P sao cho vectơ $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$

d. Tìm tập hợp điểm Q sao cho $\left|3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QB} - 2\overrightarrow{QC}\right| = \left|\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC}\right|$

Bài 10: Cho ΔABC

a. Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$

b. Tìm tập hợp điểm N sao cho $2NA^2 + \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NC}$

c. Tìm tập hợp điểm P sao cho $PA^2 - PB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$.

Bài 11: Cho ΔABC với BC = a; CA = b; AB = c. G là trọng tâm của tam giác, M là điểm bất kì

a. Tính theo a, b, c

i. $GA^2 + GB^2 + GC^2$

ii. $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

b. Tính theo a, b, c và MG giá trị của biểu thức:

$$f(m)=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$$

c. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $f(M)=0$

Bài 12: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a

a. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\frac{a^2}{2}$

b. Tìm tập hợp điểm N sao cho $2NA^2-NB^2-NC^2=0$

Bài 13: Cho hình vuông ABCD cạnh là a

a. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=5a^2$

b. Tìm tập hợp những điểm N sao cho $NA^2+NB^2+NC^2=3ND^2$

c. Tìm tập hợp những điểm P sao cho $\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}\right)=3a^2$

d. Tìm tập hợp những điểm Q sao cho $2QA^2+QB^2=QC^2+QD^2$.

Bài 14: Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, CD và AD

a. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)=0$

b. Tìm tập hợp điểm N sao cho $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}.\overrightarrow{ND}=\frac{1}{2}IJ^2$.

Bài 15: Cho ΔABC, lấy M, N, P thoả mãn

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{AN}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài 16: Cho ΔABC, trên AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho:

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overline{AB}}=\frac{k}{k+1};\ \frac{\overrightarrow{BN}}{\overline{BC}}=2;\ \frac{\overrightarrow{CP}}{\overline{CA}}=\frac{1}{2k+1}\quad (k>0)$$

Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài 17: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Lấy các điểm I, J sao cho:

$$3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$$

Chứng minh O, I, J thẳng hàng.

Bài 18: Cho ΔABC, trên BC lấy điểm D sao cho $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$. Gọi E là điểm thoả mãn $4\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$. Chứng minhA, E, D thẳng hàng.

Bài 19: Cho ΔABC có $0 < A < 90^o$. I là trung điểm của cạnh BC. Vẽ về phía ngoài ΔABC các tam giác BAM và CAN vuông cân tại A. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b. $AI \perp MN$; $BN \perp CM$

c. Tam giác JIK vuông cân tại I trong đó J, K lần lượt là trung điểm của BM và CN.

Bài 20: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M, N, P, Q là các điểm tương ứng nằm trên cạnh AB, BC, CD và DA sao cho AM : AB = BN : BC = CP : CD = DQ : DA. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

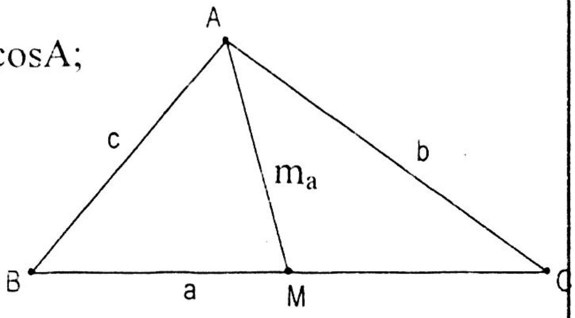
Bài 21: Cho hình vuông ABCD, trên DC lấy điểm E, kẻ $EF \perp AC$ ($F \in BC$). M, N lần lượt là trung điểm của AE và DC. Chứng minh rằng $MN \perp DF$.

Bài 22: Cho ΔABC có BC = a; AC = b; AB = c. Tính độ dài trung tuyến AM của tam giác.

§2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

Cho tam giác ABC*:* a, b, c *lần lượt là ba cạnh đối diện với ba góc* A, B, C *của tam giác.*



1. Định lí cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$;

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$;

2. Định lí sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

*(*R *là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác* ABC*).*

3. Độ dài đường trung tuyến của tam giác: Gọi m_a, m_b, m_c *là độ dài các đường trung tuyến lần lượt vẽ từ các đỉnh* A, B, C *của tam giác* ABC*:*

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4};$$

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4};$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4};$$

4. Các công thức tính diện tích tam giác:

Gọi R, r *lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp tam giác* ABC; p *là nửa chu vi* (p = $\frac{a+b+c}{2}$) *và* S *là diện tích của tam giác.*

$$S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ca.\sin B;$$

$$S = \frac{abc}{4R} = pr;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ *(công thức Hê–rông).*

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Tính một số yếu tố trong tam giác theo một số yếu tố cho trước (trong đó có ít nhất một cạnh). Giải tam giác***

Phương pháp: – Sử dụng định lí cosin và định lí sin.

– Tính toán các yếu tố trung gian (trước khi tính yếu tố cần tìm) bằng các hệ thức lượng trong tam giác thích hợp.

Chú ý: Bạn đọc hãy ôn tập lại các hệ thức lượng trong tam giác vuông (đã học ở lớp 9).

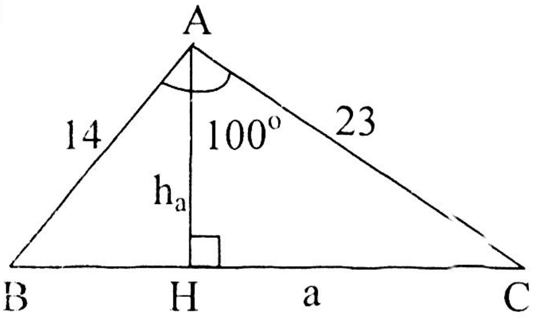
Bài 1: *Cho tam giác* ABC *có* $b = 23cm$, $c = 14cm$, $\widehat{A} = 100^o$.

a) Tính các cạnh và góc còn lại của tam giác;

b) Tính diện tích của tam giác;

c) Tính đường cao h_a vẽ từ A của tam giác.

Giải:



a) Theo định lí cosin, ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$= 23^2 + 14^2 - 2.23.14.\cos 100^o \approx 836,83.$

Do đó: $a = \sqrt{836,83} \approx 28,9$ (cm);

Từ định lí cosin ta cũng có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(28,9)^2 + 14^2 - 23^2}{2.28,9.14} \approx 0,62.$$ Do đó: $\widehat{B} \approx 51^o41'$;

Khi đó: $\widehat{C} \approx 180^o - (100^o + 51^o41') = 28^o19'$.

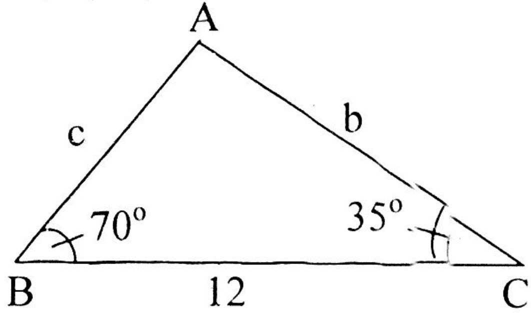
b) Ta có: $S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}.28,9.23.\sin 28^o19' \approx 157,6$ (cm^2).

c) Ta có: $h_a = b.\sin C = 23.\sin 28^o19' \approx 10,9$ (cm).

Bài 2: *Cho tam giác* ABC *có* $a = 12cm$, $\widehat{B} = 70^o$, $\widehat{C} = 35^o$.

a) Tính các cạnh và các góc còn lại của tam giác;

b) Tính bán kính R *của đường tròn ngoại tiếp tam giác.*



Giải:

a) Ta có: $\widehat{A} = 180^o - (\widehat{B} + \widehat{C}) =$

$= 180^o - (70^o + 35^o) = 75^o$;

Theo định lí sin, ta có: $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a.\sin B}{\sin A} \\ c = \dfrac{a.\sin C}{\sin A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{12.\sin 70^\circ}{\sin 75^\circ} \\ c = \dfrac{12.\sin 35^\circ}{\sin 75^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \approx 11,7\text{cm} \\ c \approx 7,1\text{cm} \end{cases};$$

b) Theo định lí sin, ta có: $2R = \dfrac{a}{\sin A}$

$$\Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{12}{2.\sin 75^\circ} \approx 6,2(\text{cm}).$$

Nhận xét: – Ta sử dụng định lí cosin khi biết 2 cạnh và góc xen giữa 2 cạnh đó.

- Ta sử dụng định lí sin khi biết:

+ 1 cạnh và góc đối diện cạnh đó;

hoặc + 1 cạnh và 2 góc kề với nó (lúc này ta sẽ tính được góc đối diện cạnh đó).

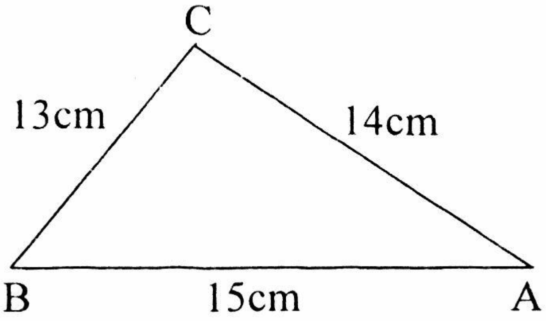
- Việc tìm các yếu tố của tam giác khi biết các yếu tố khác còn được gọi là giải tam giác.

Bài 3: *Cho tam giác* ABC *có* a = 13cm, b = 14cm, c = 15cm.

a) Tính $\widehat{A}$; cosB; tgC;

b) Tính diện tích của tam giác.

Giải:



a) Theo định lí cosin, ta có:

$$^*\ \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2.14.15} = 0,6 \Rightarrow \widehat{A} \approx 53^\circ 7'.$$

$$^*\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2.13.15} \approx 0,5.$$

Ta có: $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - (0,5)^2 = 0,75 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

* Do $\cos B \approx 0,5 \Rightarrow \widehat{B} \approx 60^\circ$. Từ đó: $\widehat{C} \approx 180^\circ - (53^\circ 7' + 60^\circ) = 66^\circ 53'$

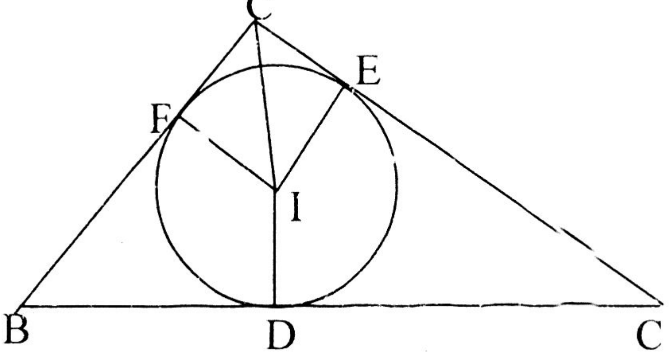
$\Rightarrow \text{tg}C = \text{tg}66^\circ 53' \approx 2,34.$

Dạng 2: ***Chứng minh các hệ thức liên quan tới các yếu tố trong tam giác.***

Phương pháp: Sử dụng các hệ thức lượng đã có và các tính chất, các yếu tố trong tam giác để chứng minh.

Bài 1: *Cho tam giác ABC có các cạnh* a, b, c; *các đường cao tương ứng là* h_a, h_b, h_c. *Chứng minh: a)* $r = (p-a)\text{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\text{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$;

b) $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.



Giải:

a) Ta có: $r = IE = AE.\text{tg}\frac{A}{2}$ (*);

Mặt khác:

$AE + AF + BF + BD + CD + CE = 2p$

$\Rightarrow 2AE + 2(BD + CD) = 2p \Rightarrow 2AE + 2a = 2p$

$\Rightarrow AE = p - a$;

Thế vào (*) ta có: $r = (p-a)\text{tg}\frac{A}{2}$.

Tương tự, ta chứng minh được: $r = (p-b)\text{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$.

b) Dựa vào công thức tính diện tích tam giác: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = pr$, ta có: $\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S}; \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}; \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}; \frac{1}{r}=\frac{p}{S}$.

Khi đó: $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$.

Dạng 3: ***Nhận dạng tam giác***

Phương pháp: Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác và các tính chất của các tam giác đặc biệt: tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều.

Chú ý: Nếu $b^2 + c^2 = a^2$ thì tam giác ABC vuông tại A;
Nếu b = c thì tam giác ABC cân tại A;
Nếu a = b = c thì tam giác ABC đều.

Bài 1: *Xác định dạng của tam giác* ABC, *biết:* $S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$.

Giải:

Theo công thức Hê–rông, ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

Do đó: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$

$\Leftrightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-c)(p-b) \Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (p-c)^2(p-b)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c) \Leftrightarrow p^2 - pa = p^2 - pb - pc + bc \Leftrightarrow p(b+c-a) = bc \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a) = 2bc \Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = 2bc \Leftrightarrow b^2 + 2bc + c^2 - a^2 = 2bc$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$;

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

Bài 2: *Tam giác* ABC *có các góc và các cạnh thoả mãn:*
$\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$. *Chứng minh tam giác* ABC *là tam giác cân.*

Giải:

Ta có: $\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1+\cos B}{\sin B}\right)^2 = \left(\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}$

$\Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{1-\cos^2 B} = \frac{2a+c}{2a-c} \Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c}$;

Theo định lí cosin, ta có: $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, do đó:

$\frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{1-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} = \frac{a^2+c^2-b^2+2ac}{b^2-a^2-c^2+2ac}$. Tức là:

$\frac{a^2+c^2-b^2+2ac}{b^2-a^2-c^2+2ac} = \frac{2a+c}{2a-c}$

$\Leftrightarrow 2a^3 + 2ac^2 - 2ab^2 + 4a^2c - a^2c - c^3 + b^2c - 2ac^2 = 2ab^2 - 2a^3 - 2ac^2 + 4a^2c + b^2c - a^2c - c^3 + 2ac^2 \Leftrightarrow 4a^3 - 4ab^2 = 0 \Leftrightarrow 4a(a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$.

Vậy tam giác ABC cân tại C.

C. BÀI TẬP

Bài 1: Tính các góc, các cạnh còn lại; đường cao h_a và bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC biết:

a) $a = 118$ cm, $b = 92$ cm, $\widehat{C} = 58^{o}$;

b) $b = 31{,}2$cm, $\widehat{A} = 124^{o}30'$, $\widehat{C} = 18^{o}$;

c) $a = 153$ cm, $b = 117$ cm, $c = 134$ cm.

Bài 2: Gọi m_a, m_b, m_c là các trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c của tam giác ABC:

a) biết $a = 26$ cm, $b = 18$ cm, $c = 16$cm. Tính m_a;
b) biết $a = 7$ cm, $b = 11$ cm, $m_c = 6$ cm. Tính c;
c) biết $a = 5$cm, $b = 7$ cm, $\widehat{C} = 46^{o}$. Tính m_b.

Bài 3: Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD, chứng minh:

a) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$;
b) Tứ giác ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$;
c) Xác định công thức tính đường chéo d của hình thang cân biết đáy nhỏ là a, đáy lớn là b và cạnh bên là c.

Bài 4: Chứng minh tập các điểm mà tổng các bình phương khoảng cách đến 2 điểm cố định A, B cho trước bằng một số không đổi k^2 là một đường tròn.

Bài 5: Cho tam giác ABC, chứng minh:

a) $S = \dfrac{abc}{4R}$; b) $S = pr$;

c) $\sin A = \dfrac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

d) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Bài 6: Gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp thuộc cạnh a, b, c của tam giác ABC; r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh:

a) $r_a = p\,\mathrm{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{S}{p-a} = \dfrac{(p-b)(p-c)}{r}$;

b) b) $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$;

c) $S = \sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$;

d) $r = p\,tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2}$;

e) $r_a + r_b + r_c - r = 4R$ (công thức Stây-nơ).

Bài 7: Cho tam giác ABC, chứng minh:

a) $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ b) $c^2 = (a-b)^2 + 4S.\dfrac{1-\cos C}{\sin C}$;

c) $a\sin B\sin C = h_a\sin A$;

d) $\cot gA + \cot gB + \cot gC = \dfrac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}$.

Bài 8: Cho tam giác ABC, chứng minh:

a) Nếu $m_a = c$ thì $tgB = 3tgC$;

b) Nếu $a + c = 2b$ thì $ac = 6Rr$.

Bài 9: Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là:

a) $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$; b) $tg\dfrac{B}{2} = \dfrac{b}{a+c}$.

c) $2R + r = p$;

Bài 10: Xác định dạng tam giác ABC, biết rằng:

a) $(p-b)\cot g\dfrac{C}{2} = p\,tg\dfrac{B}{2}$; b) $\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \dfrac{tgB}{tgC}$;

c) $S = \dfrac{2}{3}R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$;

d) $\sin^4 C + 2\sin^4 A + 2\sin^4 B = 2\sin^2 C(\sin^2 A + \sin^2 B)$.

Bài 11: Chứng minh rằng nếu: $\begin{cases} c = 2a.\cos B \\ \dfrac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c} = c^2 \end{cases}$ thì tam giác ABC đều.

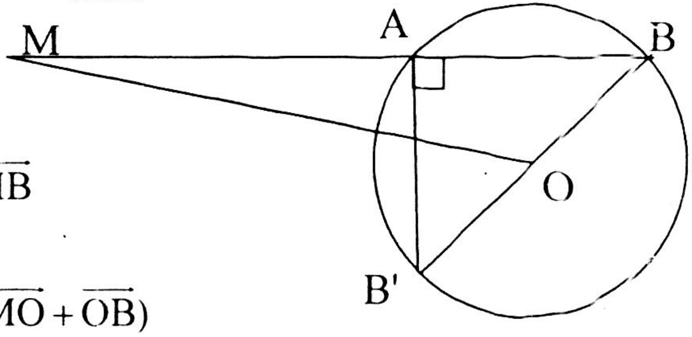
§3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Sử dụng tích vô hướng và các tính chất của nó ta sẽ chứng minh được một số kết quả liên quan đến đường tròn, tứ giác...

A. MỘT SỐ BÀI TOÁN

Bài 1: *Chứng minh rằng: Nếu từ một điểm* M *bất kì:* $OM = d$, *ta vẽ cát tuyến* MAB *với đường tròn* (O; R) *thì giá trị* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ *không đổi.*

Giải:



Kẻ đường kính BB', ta có:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{B'A}\right).\overrightarrow{MB}$$

$$= \overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{B'A}.\overrightarrow{MB}$$

$= \overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MB}$ (Vì $B'A \perp MB$)

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB'})(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})$$

$$= \overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB'})+\overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{OB}$$

$$= \overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OB}^2 = d^2-R^2 \text{ (Vì } \overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OB}\text{)}.$$

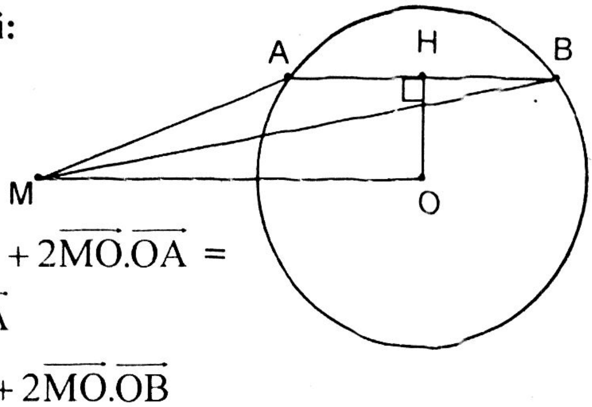
Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$ không đổi.

Nhận xét: - Từ kết quả trên ta có: Nếu từ M ta vẽ các cát tuyến MAB, MCD, MEF,...thì: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = \ldots$Khi đó: Ta gọi giá trị $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$ là phương tích của điểm M đối với đường tròn (O).

- Nếu M, A, B thẳng hàng (theo thứ tự này) thì $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA.MB$.

Bài 2: *Cho đường tròn tâm O, bán kính R và điểm M sao cho* $OM = d$. *Kẻ dây AB song song với OM. Chứng minh:* $MA^2 + MB^2 = 2(d^2 + R^2)$.

Giải:



Ta có:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} =$$

$$= d^2+R^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}$$

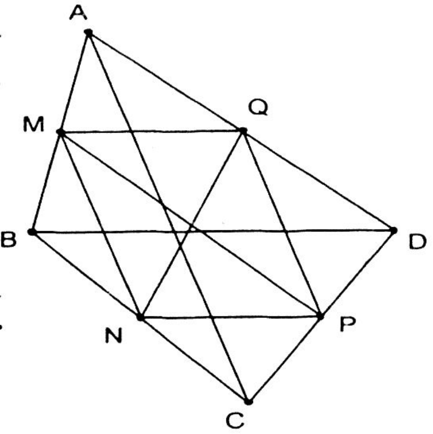
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}$$

$$= d^2+R^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2(d^2+R^2)+2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

Gọi H là trung điểm của AB, khi đó: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OH}$ và OH ⊥ AB.

Từ đó: $MA^2+MB^2=2(d^2+R^2)+4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OH}=2(d^2+R^2)$.



Bài 3: *Chứng minh rằng trong một tứ giác tổng các bình phương của hai đường chéo bằng hai lần tổng các bình phương của hai đoạn thẳng nối các trung điểm của các cạnh đối diện.*

Giải:

Giả sử ta có tứ giác ABCD: M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác. Ta cần chứng minh:
$AC^2+BD^2=2(MP^2+NQ^2)$.

Ta có: $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}\Rightarrow\overrightarrow{MP}^2=\overrightarrow{MN}^2+\overrightarrow{NP}^2+2\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}$;

$\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MQ}\Rightarrow\overrightarrow{NQ}^2=\overrightarrow{NM}^2+\overrightarrow{MQ}^2+2\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{MQ}$

$\Rightarrow MP^2+NQ^2=2MN^2+NP^2+MQ^2+2\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{MQ})$

Mặt khác: tứ giác MNPQ là hình bình hành nên: $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MQ}$.

Do đó: $MP^2+NQ^2=2MN^2+2NP^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 2(MP^2+NQ^2)=4MN^2+4NP^2$.

Ta lại có: + MN là đường trung bình của ΔABC nên: AC = 2MN

$\Rightarrow AC^2=4MN^2$;

+ NP là đường trung bình của ΔACD nên: BD = 2NP $\Rightarrow BD^2=4NP^2$;

Vậy: $AC^2+BD^2=2(MP^2+NQ^2)$.

B. BÀI TẬP

Bài 1: a) Cho tứ giác ABCD có AB cắt DC tại M. Chứng minh: Tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn ⇔ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$;

b) Cho tam giác ABC: M thuộc đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn AB. Chứng minh: MC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ⇔ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MC^2$.

Bài 2: Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B; M là điểm trên đường thẳng AB. Từ M kẻ 2 đường thẳng d và d' sao cho d cắt (O) tại 2 điểm C, D; d' cắt (O') tại 2 điểm E, F. Chứng minh: $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}$.

Bài 3: Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC và H là trực tâm tam giác đó. a) Chứng minh: $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HF}$;

b) Từ một điểm M trên đường thẳng AH lần lượt kẻ các cát tuyến MPQ và MRS với các đường tròn đường kính HB và HC. Chứng minh $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MR}.\overrightarrow{MS}$.

Bài 4: Cho hình thang cân ABCD có CD là đáy lớn. Xét M di động trên đường thẳng CD sao cho M không trùng với C, D. Gọi N là giao điểm thứ hai khác M của các đường tròn (BCM) và (DAM).

a) Gọi S là giao điểm của AD và BC, chứng minh: S, M, N thẳng hàng. Từ đó suy ra MN luôn đi qua một điểm cố định;

b) Chứng minh: N di động trên một đường tròn cố định.

Bài 5: Cho đường tròn (O) cố định có bán kính R và một điểm A cố định không nằm trên đường tròn. Gọi BC là đường kính thay đổi của (O; R). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua một điểm cố định khác điểm A.

Bài 6: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Trên đường thẳng AB lấy điểm P sao cho PO = 2R. Một cát tuyến tùy ý qua P cắt đường tròn tại C và D. Các tiếp tuyến tại C và D cắt nhau tại M. Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng AB.

a) Chứng minh ngũ giác CMDOH nội tiếp trong đường tròn đường kính MO;

b) Chứng minh rằng khi cát tuyến PCD quay quanh P thì PC.PD không đổi và tính tích đó theo R;

c) Chứng minh rằng PH.PO không đổi và từ đó suy ra điểm H cố định khi PCD quay quanh P.

Bài 7: Chứng minh rằng tập hợp các điểm mà hiệu các bình phương khoảng cách đến 2 điểm cố định A, B cho trước bằng một số không đổi k^2 là một đường thẳng vuông góc với AB, xác định giao điểm của hai đường thẳng đó.

Bài 8: Chứng minh rằng tập hợp các điểm M sao cho $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ là đường thẳng vuông góc với trung tuyến AD của tam giác ABC.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

§1. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Bài 1

a. Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Suy ra: $\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Do đó: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2} = \dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{2}$

Tương tự: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{2}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2}$

b. Ta có: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của BC

Suy ra: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Do đó: $AG^2 = \dfrac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$

$$= \frac{1}{9}(c^2 + b^2 + b^2 + c^2 - a^2) = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

Vậy: $AG = \dfrac{1}{3}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AG và BC

Ta có: $\left|\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}\right| = AG.BC.\cos\alpha$

Trong đó $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \dfrac{1}{3}(AC^2 - AB^2) = \dfrac{1}{3}(b^2 - c^2)$

Vậy: $\text{Cos}\alpha = \dfrac{\frac{1}{3}\left|b^2 - c^2\right|}{\frac{1}{3}a\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}} = \dfrac{\left|b^2 - c^2\right|}{a\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}$

Bài 2

a. Tương tự bài 1 tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{57}{2}$

$$\text{CosA}=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AB.AC}=\frac{57}{90}$$

b. Tính tương tự bài mẫu 1

Đáp số: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{2}$

$$=-\frac{25+49+81}{2}=-\frac{155}{2}$$

c. Ta có: $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Rightarrow 4AI^2=AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Vậy: $4AI^2=25+81+2.5.9.\frac{57}{90}=163$

Suy ra: $AI=\frac{\sqrt{163}}{2}$

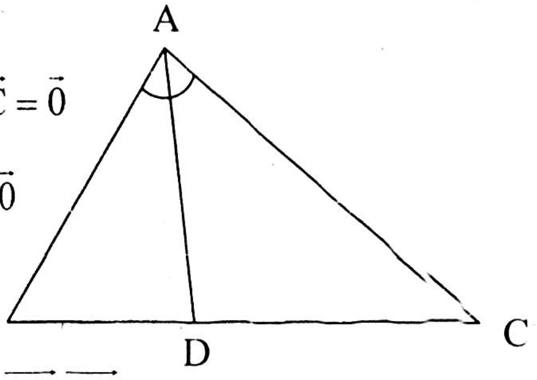
d. Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GD}=0$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}(GA^2+GB^2+GC^2)$$

Trong đó tính tương tự như bài tập 1 ta có GA^2, GB^2, GC^2 và thay vào biểu thức và có kết quả



e. Ta có: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

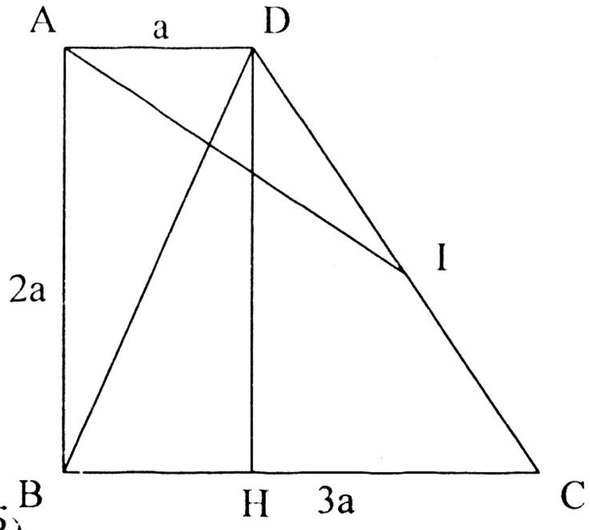
$$\Rightarrow 3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{1}{5}(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow AD^2=\frac{1}{25}(9AB^2+4AC^2+12\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{1}{25}(9.25+4.81+12.\frac{57}{2})=\frac{891}{25}$$

Bài 3



a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}$ (vì $\overrightarrow{BA}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{CD}$ lên vectơ $\overrightarrow{AB}$)

$$=-AB^2=-4a^2$$

* $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=3a^2$

* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{BD}$

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$$

$$=-4a^2+3a^2=-a^2$$

(Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}=-4a^2$)

b. Ta có: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{2}(3a^2-4a^2+a^2-0)=0.$$

Bài 4

a. Ta có: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$$

$$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$$

Thay vào biểu thức $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB}=0$

b. $MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$

$$=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}^2)+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$$

$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$$

$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

Bài 5

Ta có: $AC^2+BD^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2$

$$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2=2(AB^2+AD^2).$$

Bài 6

Ta có:

a. $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{DA}^2$

$= \overrightarrow{AB}^2 - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})^2 - \overrightarrow{AD}^2$

$= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}^2$

$= 2\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

b. Ta có: $AC \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$

$\Leftrightarrow AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 0$

$\Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$

Bài 7

a. Ta có: $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Suy ra: $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \left(\overrightarrow{CH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

$= \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$

Mà $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA} = 0;\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CI};\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI}$

Do đó: $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CI}) - \frac{1}{4}BC^2$

$= \frac{1}{2}BC^2 - \frac{1}{4}BC^2 = \frac{1}{4}BC^2.$

b. $AH^2 = (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MA})^2 = MH^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}$

$= MH^2 + MA^2 - \frac{1}{2}BC^2$

$\Rightarrow MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2.$

Bài 8

a. $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC}$

Vậy M hoàn toàn xác định.

b. $\overrightarrow{CN} = 6\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} - 8\overrightarrow{NC}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CN} = 6\overrightarrow{NC} + 6\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{NC} + 2\overrightarrow{CB} - 8\overrightarrow{NC}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CN} = 6\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CN} = 4\overrightarrow{CA} + 2\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CN} = 4\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{CI}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CN} = 4(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CI})$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CN} = 8\overrightarrow{CK}$ với K là trung điểm của AI

Vậy điểm N hoàn toàn xác định.

c. $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AP} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad 6\overrightarrow{AI} + 6\overrightarrow{AJ} - 12\overrightarrow{AP} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}\right)$

Vậy P là trung điểm của IJ.

d. $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\left(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AQ} + 12\overrightarrow{AP} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AQ} + 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ (Theo c)

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Vậy Q là trung điểm của BC.

Bài 9

a. Ta có $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow \quad \left|2\overrightarrow{MD}\right| = \left|2\overrightarrow{ME}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MD}\right| = \left|\overrightarrow{ME}\right|$

$\Leftrightarrow \quad MD = ME$

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của DE.

b. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NG}$ với G là trọng tâm ΔABC

$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=2\overrightarrow{ND}$

Từ đó: $\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right|=\dfrac{3}{2}\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right|$

$\Leftrightarrow\ \left|3\overrightarrow{NG}\right|=\dfrac{3}{2};\left|2\overrightarrow{ND}\right|\ \Leftrightarrow\ \left|\overrightarrow{NG}\right|=\left|\overrightarrow{ND}\right|$

Vậy tập hợp điểm N là đường trung trực của GD.

c. Ta có: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{PI}+2\overrightarrow{IC}$

$=\ 4\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}$

Gọi I là trung điểm của DC khi đó $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{ID}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Khi đó $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=4\overrightarrow{PI}\,//\,\overrightarrow{BC}$

Vậy tập hợp P là đường thẳng qua I và song song với BC.

d. Gọi K là điểm sao cho $3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ (*)

Khi đó: $3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Suy ra: $3\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

Hay $3\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{CB}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

Vậy xác định điểm K duy nhất thoả (*)

Từ đó: $3\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QB}-2\overrightarrow{QC}=3\overrightarrow{QK}+3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{QK}+2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{QK}-2\overrightarrow{KC}$

$=3\overrightarrow{QK}$

Mặt khác: $\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{CB}$

Vậy: $\left|3\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QB}-2\overrightarrow{QC}\right|=\left|\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QC}\right|$

$\Leftrightarrow\ \left|3\overrightarrow{QK}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|\ \Leftrightarrow\ QK=\dfrac{1}{3}CB$

Vậy tập hợp điểm Q là đường tròn tâm K đường kính $\dfrac{1}{3}BC$.

Bài 10

a. Gọi I là điểm sao cho $2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Suy ra: $2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{MI}$

Khi đó: $\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI}=0.$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng qua I và vuông góc với AB

b. $2NA^2 + \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NC}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{NA}\left(2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}\right) = 0$

Chọn J là điểm sao cho $2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} - \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ (thì J tồn tại duy nhất)

Khi đó $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NJ}$

Vậy đẳng thức đã cho trở thành $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NJ} = 0$

Do đó tập hợp điểm N là đường tròn đường kính AJ.

c. $PA^2 - PB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{PA}^2 - \overrightarrow{PB}^2) + (\overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{CB}^2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}\right)\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) + \left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right)\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PA}.2\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{BA}.2\overrightarrow{CD} = 0$ (với D là trung điểm AB)

$\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{BA}(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{CD}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE}) = 0$ (với E là điểm sao cho $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$)

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PE} = 0$

Vậy tập hợp P là đường thẳng qua E và vuông góc với BA.

Bài 11

a. i. Ta có với mọi điểm M:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ (Bài tập luyện 4 – Dạng 3)

Suy ra: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = AB^2 + AC^2 - 3AG^2$ (chọn $M \equiv A$)

Gọi D là trung điểm của BC ta có:

$$AB^2 + AC^2 = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)^2$$

$$= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB}\right)^2$$

$$= 2AD^2 + 2DB^2 = 2AD^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Suy ra: $AD^2 = \dfrac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} = \dfrac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$

Hơn nữa $AG = \dfrac{2}{3}AD \Leftrightarrow AG^2 = \dfrac{4}{9}AD^2 = \dfrac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{9}$

Vậy $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

ii. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$$

$$= -\frac{a^2 + b^2 - c^2}{6}$$

b. Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Suy ra: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}\right) = 9MG^2$

Do đó:

$3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}\right) = 9MG^2$

Vậy: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 3MG^2 - \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2}{2}$

$$= 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$

c. $f(M) = 0 \Leftrightarrow 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} = 0 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{18}$

$$\Leftrightarrow MG = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{3\sqrt{2}}$$

Vậy tập hợp M là đường tròn tâm G bán kính $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{3\sqrt{2}}$

Bài 12

a. Gọi I là trung điểm của BC

Ta có: $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = \frac{a^2}{2}$

$$\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \overrightarrow{IB}^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b. Ta có: $2NA^2 - NB^2 - NC^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GN}\right)^2 - \left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GN}\right)^2 - \left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GN}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2GA^2 + 2GN^2 - 4\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GN} - GB^2 - GN^2 + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GN} - GC^2 - GN^2 + 2\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GN} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN}\left(2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN}.\left(2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GI}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{GN}.\overrightarrow{IA} = 0$$

Vậy tập hợp N là đường thẳng qua G vuông góc với IA

Bài 13

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD

a. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 5a^2$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\right) = 5a^2$$

$$\Leftrightarrow 2MO^2 + \overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = 5a^2$$

$$\Leftrightarrow MO = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

Vậy tập hợp M là đường tròn tâm O bán kính $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

b. Ta có $NA^2 + NB^2 + NC^2 = 3ND^2$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = 3\left(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OD}\right)^2$$

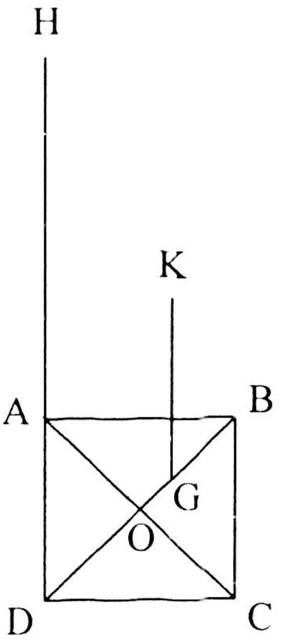
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NO}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OD}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{OD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NO}.\overrightarrow{OD} = 0$$

Vậy tập hợp điểm N là đường thẳng qua O vuông góc với OD hay tập hợp N là đường thẳng AC.

c. $\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)\left(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}\right) = 3a^2$



$\Leftrightarrow\quad 3\overrightarrow{PG}.\overrightarrow{BC} = 3a^2$ (G là trọng tâm tam giác ABC)

$\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{PG}.\overrightarrow{BC} = a^2$

Gọi K là điểm sao cho $\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{BC}$

Khi đó $\overrightarrow{PG}.\overrightarrow{BC} = a^2$

$\Leftrightarrow\ \left(\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KG}\right)\overrightarrow{BC} = a^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{BC} = a^2$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{PK}.\overrightarrow{BC} + a^2 = a^2 \qquad \Leftrightarrow\ \overrightarrow{PK}.\overrightarrow{BC} = 0$

Vậy tập hợp P là đường thẳng qua K vuông góc với BC.

d. Chọn H sao cho $2\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{CB}$

Khi đó $2QA^2 + QB^2 = QC^2 + QD^2$

$\Leftrightarrow\quad 2\left(\overrightarrow{QH} + \overrightarrow{HA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{QH} + \overrightarrow{HB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{QH} + \overrightarrow{HC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{QH} + \overrightarrow{HD}\right)^2$

$\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{QH}^2 + \overrightarrow{QH}\left(2\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HD}\right) + 2HA^2 + HB^2 - HC^2 - HD^2 = 0$

$\Leftrightarrow\quad QH^2 + 8a^2 + 5a^2 - 10a^2 - 9a^2 = 0 \Leftrightarrow QH^2 = 6a^2 \Leftrightarrow QH = a\sqrt{6}$

Vậy tập hợp điểm Q là đường tròn tâm H bán kính $a\sqrt{6}$.

Bài 14

a. Gọi H là điểm sao cho $\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}$ thì H xác định duy nhất (H cố định)

Khi đó $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\right) = 0$

$\Leftrightarrow\quad 6\overrightarrow{MH}.2\overrightarrow{MK} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MK} = 0$

Vậy tập hợp M là đường tròn đường kính HK.

b. $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}.\overrightarrow{ND} = \frac{1}{2}IJ^2$

$\Leftrightarrow\quad \left(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JC}\right)\left(\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JD}\right) = \frac{1}{2}IJ^2$

$\Leftrightarrow\quad \left(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{NI} - \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JC}\right)\left(\overrightarrow{NJ} - \overrightarrow{JC}\right) = \frac{1}{2}IJ^2$

$\Leftrightarrow\quad NI^2 - IA^2 + NJ^2 - JC^2 = \frac{1}{2}IJ^2$

$$\Leftrightarrow \quad NI^2 + NJ^2 = \frac{1}{2}IJ^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{CD^2}{4}$$

Gọi O là trung điểm IJ khi đó đẳng thức trên trở thành

$$\left(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{IO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OJ}\right)^2 = \frac{1}{2}IJ^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{CD^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2NO^2 + 2OI^2 = \frac{1}{2}IJ^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{CD^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad NO^2 = \frac{AB^2 + CD^2}{8}$$

Vậy tập hợp N là đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt{\frac{AB^2 + CD^2}{8}}$.

Bài 15

Hướng dẫn: – Biểu thị $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

– Kết quả $\overrightarrow{PM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

– Vậy $\overrightarrow{PM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PN}$ Do đó M, N, P thẳng hàng.

Bài 16

Hướng dẫn: – Biểu thị $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

– Kết quả $\overrightarrow{MP} = \frac{2k}{2k+1}\overrightarrow{AC} - \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC} - \frac{2k+1}{k+1}\overrightarrow{AB}$

– Vậy $\overrightarrow{MP} = \frac{k}{2k+1}\overrightarrow{MN}$ Do đó M, N, P thẳng hàng.

Bài 17

Hướng dẫn: – Biểu thị $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$ theo $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ ta được:

$$\overrightarrow{IO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}\right)$$

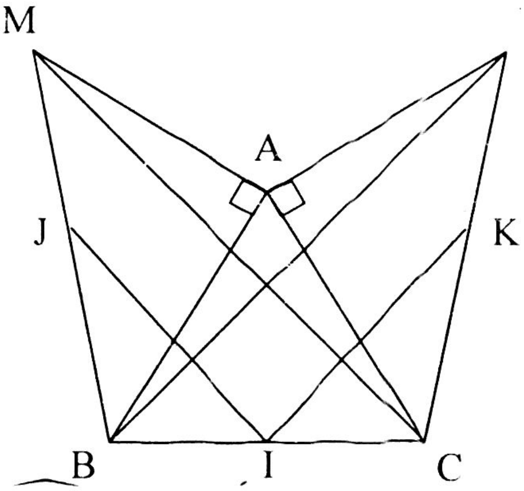
$$\overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$$

– Vậy $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OJ}$ do đó O, I, J thẳng hàng.

Bài 18

Hướng dẫn: Ta biểu thị được $\overrightarrow{EA} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{ED}$ do đó A, E, D thẳng hàng.

Bài 19



a. Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN} = AB.AN\cos.\widehat{BAN}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = AC.AM.\text{Cos}\widehat{CAM}$

Vì: $\widehat{BAN} = \widehat{CAM} = 90^o + \widehat{BAC}$

$AB = AM; \quad AN = AC$

Do đó: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = AM.AN.\cos\widehat{MAN}$

$= AB.AC.\cos(180^o - \widehat{BAC})$

$= AB.AC.\cos\widehat{BAC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b. * $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}\right) = 0$

Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN} = 0$

* $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CM} = \left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\right)$

$= \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0.$

c. Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$

Suy ra: $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = 0$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Bài 20

Hướng dẫn: Đặt $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DA} = k$

Khi đó: $\overrightarrow{MN} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{QP} = (1-k)\overrightarrow{DC} + k\overrightarrow{AD}$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ do đó MNPQ là hình bình hành.

Bài 21

Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EC}\right)\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CF}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{DC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-AD.CF + EC.DC\right) = 0$$

Bài 22

Ta có: $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 4AM^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2$

$$= AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

Ta lại có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Nên: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Do đó: $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2$

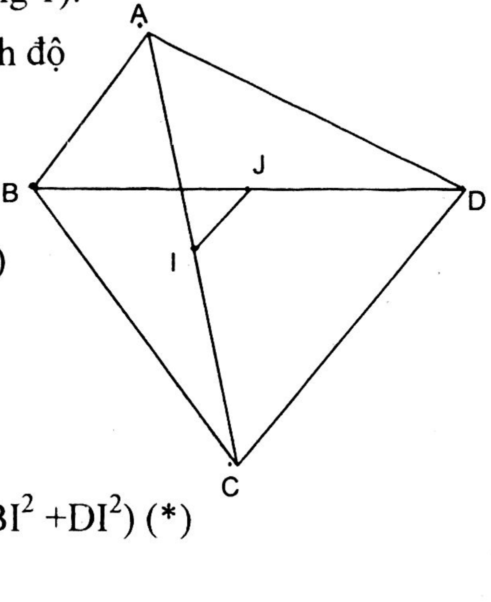
Vậy: $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

§2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Bài 1: Bạn đọc tự làm (Xem các bài tập ở Dạng 1).

Bài 2: Bạn đọc tự làm (Sử dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến tam giác).

Bài 3: a) Trong ΔABC: BI là đường trung tuyến: $AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{AC^2}{2}$ (1)



Trong ΔDAC: DI là trung tuyến:

$$CD^2 + DA^2 = 2DI^2 + \frac{AC^2}{2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + 2(BI^2 + DI^2) \ (*)$$

Mặt khác trong ΔIBD: IJ là trung tuyến:

$$BI^2 + DI^2 = 2IJ^2 + \frac{BD^2}{2}.$$

Thay vào (*) ta có ĐPCM.

c) ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow I \equiv J \Leftrightarrow IJ = 0$;

d) Giả sử ABCD là hình thang cân: AB = a, CD = b, AD = BC = c, AC = BD = d ta có: $IJ = \frac{AB + CD}{2} = \frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow IJ^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4}$$

Thay vào công thức ở câu (a) ta có: $a^2 + b^2 + 2c^2 = 2d^2 + a^2 + b^2 + 2ab$

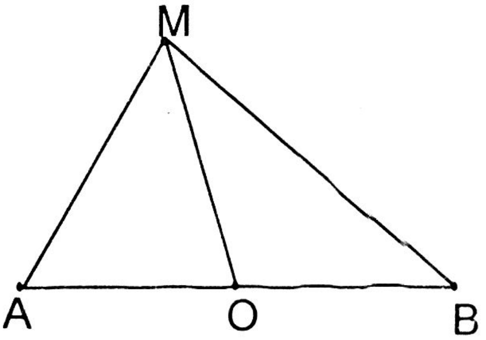
$$\Rightarrow d = \sqrt{c^2 - ab}.$$

Bài 4: Gọi M là điểm thỏa điều kiện bài toán, O là trung điểm của đoạn AB.

Trong ΔMAB: MO là trung tuyến:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$\Rightarrow MO^2 = \frac{2k^2 - AB^2}{4}.$$

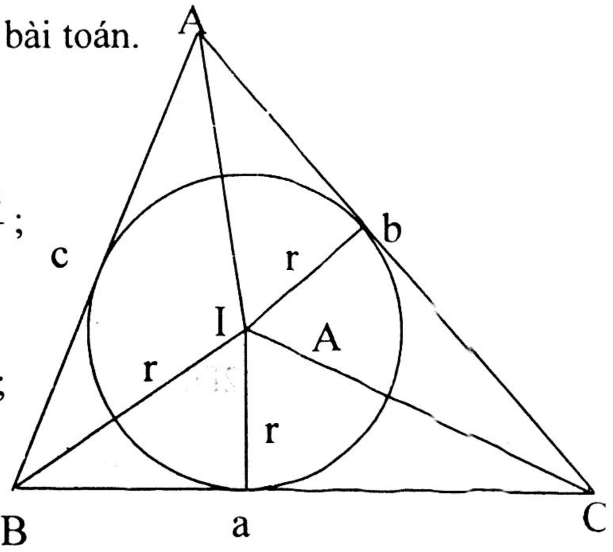


Khi $2k^2 - AB^2 > 0$ thì $OM = \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}$

$\Rightarrow$ M luôn nằm trên đường tâm O, bán kính $R = \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}$;

Khi $2k^2 - AB^2 = 0$ thì $M \equiv O$;

Khi $2k^2 - AB^2 < 0$ thì không có M thỏa bài toán.



Bài 5:

a) $S = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}bc.\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$;

b) $S = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB} =$

$$= \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}r(a+b+c) = pr;$$

c) $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$

$$= \left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) =$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}.\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2c^2} =$$

$$= \frac{2(p-b).2(p-c)(p-a).2p}{4b^2c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$$

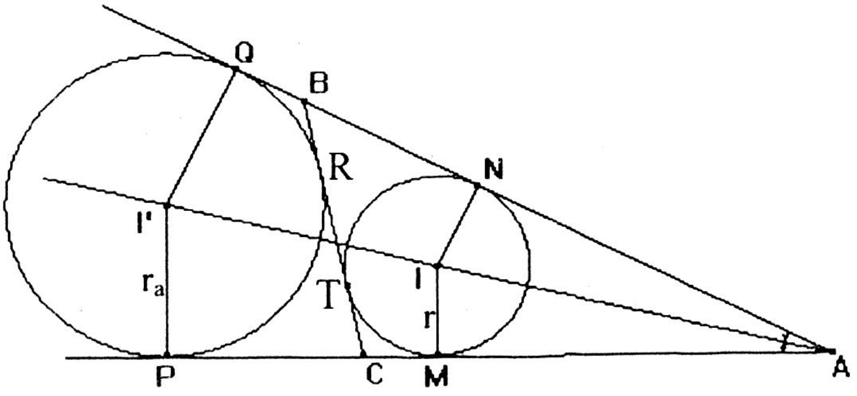
$$\Rightarrow \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

d) Theo câu (c), ta có: $S = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}bc.\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Bài 6: a)* $r_a = I'P = AP\,tg\frac{A}{2}$;

Mà AP + AQ = AC + CP + AB + BQ = AC + AB + CR + BR = AC + AB + BC = 2p



Lại có: AP = AQ, nên: 2AP = 2p ⇒ AP = p;

Từ đó: $r_a = p\,tg\frac{A}{2}$;

* Theo kết quả Bài 1–Dạng 2, ta có: $r = \frac{S}{p} = (p-a)tg\frac{A}{2}$

$$\Rightarrow \frac{S}{p-a} = p\,tg\frac{A}{2} = r_a;$$

* $r_a = \dfrac{S}{p-a} = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = \sqrt{\dfrac{p}{p-a}}\sqrt{(p-b)(p-c)}$ (*);

Mặt khác: $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\dfrac{p-a}{p}}\sqrt{(p-b)(p-c)}$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{p}{p-a}} = \dfrac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{r}$

Thế vào (*): $r_a = \dfrac{(p-b)(p-c)}{r}$.

Tương tự ta có: $r_b = ptg\dfrac{B}{2} = \dfrac{S}{p-b} = \dfrac{(p-a)(p-c)}{r}$; $r_c = ptg\dfrac{C}{2} = \dfrac{S}{p-c}$

$= \dfrac{(p-a)(p-b)}{r}$.

b) HD: $\dfrac{1}{r_a} = \dfrac{p-a}{S}$; $\dfrac{1}{r_b} = \dfrac{p-b}{S}$; $\dfrac{1}{r_c} = \dfrac{p-c}{S}$.

c) $r.r_a.r_b.r_c = \dfrac{S}{p}.\dfrac{S}{p-a}.\dfrac{S}{p-b}.\dfrac{S}{p-c} = \dfrac{S^4}{S^2} = S^2 \Rightarrow S = \sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$.

d) $S = pr = p(p-a)tg\dfrac{A}{2} = p(p-b)tg\dfrac{B}{2} = p(p-c)tg\dfrac{C}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S^3 = p^3(p-a)(p-b)(p-c)tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2} = S^2ptg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2}$

$\Rightarrow S = ptg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{S}{p} = tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2}$.

e) $r_a + r_b + r_c - r = \dfrac{S}{p-a} + \dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-c} - \dfrac{S}{p}$

$= S\left[\dfrac{p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right]$

$\dfrac{1}{S}\left[p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)\right]$ (*)

Ta có: $p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) = p(p-c)(2p-a-b)$

$= \frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)c = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - c^2]c;$

$p(p-a)(p-b) - (p-a)(p-b)(p-c) = (p-a)(p-b)c$

$= \frac{1}{4}(c+b-a)(c+a-b)c = \frac{1}{4}[c^2 - (a-b)^2]c;$

$(*) = \frac{1}{4S}c[(a+b)^2 - (a-b)^2] = \frac{abc}{S} = 4R.$

Bài 7: a) Ta có: $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$$\text{b) } \left(\frac{1-\cos C}{\sin C}\right)^2 = \frac{(1-\cos C)^2}{1-\cos^2 C} = \frac{1-\cos C}{1+\cos C} = \frac{1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} = \frac{c^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-c^2}$$

$$= \frac{c^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-c^2} = \frac{(c+b-a)(c+a-b)}{(a+b-c)(a+b+c)} = \frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos C}{\sin C} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Khi đó: $(a-b)^2 + 4S.\frac{1-\cos C}{\sin C} = (a-b)^2$

$+4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} =$

$= (a-b)^2 + 4(p-a)(p-b) = (a-b)^2 + (b+c-a)(a+c-b)$

$= (a-b)^2 + c^2 - (a-b)^2 = c^2.$

$$\text{c) } \cot gA = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a}{2R}} = \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc};$$

$$\cot gB = \frac{R(a^2+c^2-b^2)}{abc}; \cot gC = \frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc};$$

$$\Rightarrow \cot gA + \cot gB + \cot gC = \frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc};$$

$$\text{d) } a\sin B\sin C = 2R\sin A.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R} = \frac{bc}{2R}\sin A$$

Mặt khác: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{abc}{4R} \Rightarrow h_a = \frac{bc}{2R}$;

Bài 8: a) tgB = 3tgC

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B}{\cos B} = 3\frac{\sin C}{\cos C} \Leftrightarrow \frac{\frac{b}{2R}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} = 3\frac{\frac{c}{2R}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2+c^2-b^2} = \frac{3}{a^2+b^2-c^2}$$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 3(a^2 + c^2 - b^2) \Leftrightarrow 2a^2 = 4b^2 - 4c^2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2 - 2c^2 \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2$ $-a^2 = 4c^2 \quad \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = c^2 \Leftrightarrow m_a{}^2 = c^2 \Leftrightarrow m_a = c$ (giả thiết);

b) $6Rr = 6.\frac{abc}{4S}.\frac{S}{p} = \frac{3abc}{a+b+c} = \frac{3abc}{3b} = ac$;

Bài 9: a) $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow$

$$\frac{a}{2R} = \frac{\frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} \Leftrightarrow \frac{a^2+c^2-b^2}{2c} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} = b + c$$

$\Leftrightarrow b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2bc(b + c)$

$\Leftrightarrow a^2b + a^2c - bc^2 - b^2c - b^3 - c^3 = 0$

$\Leftrightarrow a^2(b + c) - bc(b + c) - (b + c)(b^2 - bc + c^2) = 0 \Leftrightarrow (b + c)(a^2 - b^2 - c^2) = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

b) Ta có: $\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{S}{p(p-b)}$ nên

$\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{b}{a+c} \Leftrightarrow$

$$\frac{S}{p(p-b)} = \frac{b}{a+c} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = \frac{b}{a+c} \Leftrightarrow \frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)} = \frac{b^2}{(a+c)^2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (b + c - a)(a + b - c)(a + c)^2 = (a + b + c)(a + c - b)b^2 \Leftrightarrow [b^2 - (a - c)^2](a + c)^2 =$ $[(a + c)^2 - b^2]b^2$

$\Leftrightarrow b^4 = (a^2 - c^2)^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

c) $2R + r = p \Leftrightarrow \frac{abc}{2S} + \frac{S}{p} = p \Leftrightarrow abcp + 2S^2 = 2Sp^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow abcp + 2p(p-a)(p-b)(p-c) = 2p^2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow abc + 2(p-a)(p-b)(p-c) = 2p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (*)$$

Bình phương 2 vế của đẳng thức (*) và rút gọn ta thu được:

$$2R + r = p \Leftrightarrow (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 \\ b^2 = a^2 + c^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right.$$

Vậy ΔABC vuông tại A hoặc B hoặc C.

Bài 10: a) $(p-b)\,\text{cotg}\frac{C}{2} = p\,\text{tg}\frac{B}{2} \Leftrightarrow (p-b).\frac{1}{\text{tg}\frac{C}{2}} = p.\text{tg}\frac{B}{2} \Leftrightarrow$

$$\frac{p(p-b)(p-c)}{S} = \frac{S}{p-b} \Leftrightarrow p(p-b)^2(p-c) = S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$\Leftrightarrow p - b = p - a \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \Delta$ABC cân tại C;

b) $\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \dfrac{\frac{b^2}{4R^2}}{\frac{c^2}{4R^2}} = \dfrac{b^2}{c^2}$;

$$\frac{\text{tg}B}{\text{tg}C} = \frac{\sin B.\cos C}{\sin C.\cos B} = \frac{\frac{b}{2R}.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{c}{2R}.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}\text{, ta có:}$$

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2} \Leftrightarrow a^2b^2 - b^4 = a^2c^2 - c^4 \Leftrightarrow (b^2-c^2)(a^2-b^2-c^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$\left[\begin{array}{l} b = c \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta$ABC là Δ cân hoặc là Δ vuông;

c) $\frac{2}{3}R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$;

$$= \frac{2}{3}R^2\left(\frac{a^3}{8R^3} + \frac{b^3}{8R^3} + \frac{c^3}{8R^3}\right) = \frac{1}{12R}(a^3 + b^3 + c^3)$$

$S = \dfrac{abc}{4R}$;

Từ đó: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$; mặt khác: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ (BĐT Cô–si)

$\Rightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều;

d) $\sin^4 C + 2\sin^4 A + 2\sin^4 B = 2\sin^2 C(\sin^2 A + \sin^2 B)$. Sử dụng ĐL sin, ta có:

$c^4 + 2a^4 + 2b^4 = 2c^2a^2 + 2c^2b^2 \Leftrightarrow c^4 - 2c^2(a^2 + b^2) + 2(a^4 + b^4) = 0$

$\Leftrightarrow c^4 - 2c^2(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = 0$

$\Leftrightarrow [c^2 - (a^2 + b^2)]^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại C.}$$

Bài 11:

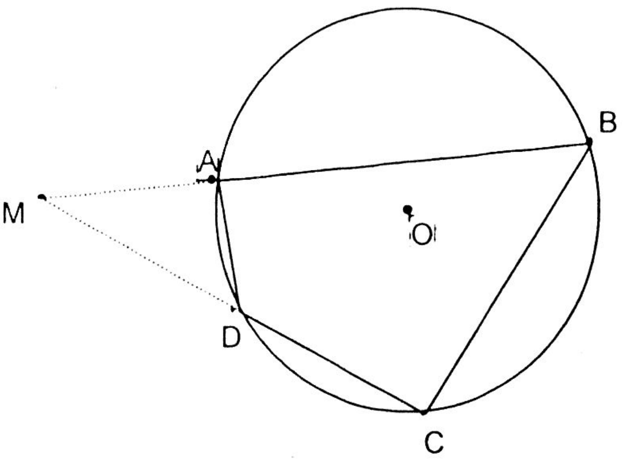
$$\begin{cases} c = 2a.\cos B & (1) \\ \dfrac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow c = 2a.\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Leftrightarrow c^2 = a^2 + c^2 - b^2 \Leftrightarrow a = b;$$

$$\text{Thế vào (2): } \frac{2a^3 - c^3}{2a - c} = c^2 \Leftrightarrow 2a^3 = 2ac^2 \Leftrightarrow a = c;$$

Vậy $a = b = c \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

§3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG



Bài 1: Hướng dẫn: Sử dụng phương tích của 1 điểm đối với một đường tròn.

a) Tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn:

theo nhận xét trong Bài 1 (mẫu), ta có:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$;

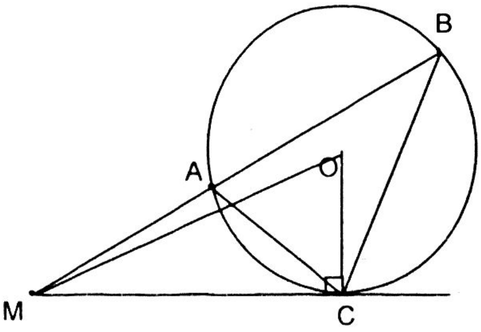
Ngược lại, với

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$, giả sử đường tròn ngoại tiếp ΔABC cắt MC tại D'. Khi đó: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'}$.

Do đó: $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'} \Rightarrow \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MD'})=0 \Rightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{D'D}=0$.

Vì M, C, D, D' thẳng hàng và $\overrightarrow{MC}\neq\vec{0}$ nên $\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$ hay D' ≡ D.
Vậy ABCD nội tiếp một đường tròn.

b) Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-R^2$;

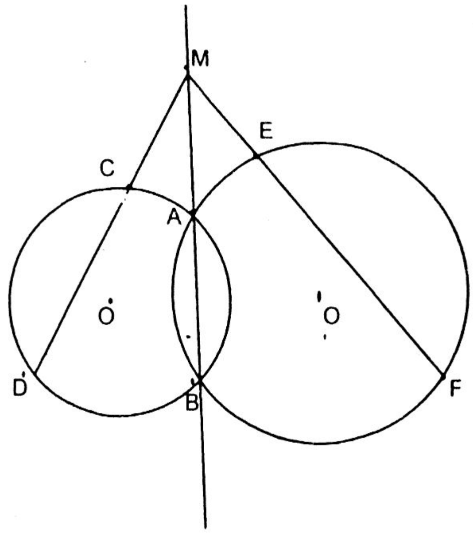
$MC^2=OM^2-OC^2=OM^2-R^2$;

Bài 2: Theo kết quả Bài 1 (trên):

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$;

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}$;

$\Rightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}$.



Nhận xét: Mọi điểm M trên AB đều có phương tích đối với (O) và (O') bằng nhau. Khi đó, ta gọi đường thẳng AB là trục đẳng phương của (O) và (O').

Bài 3:

a) Tứ giác ABDE nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HE}$;

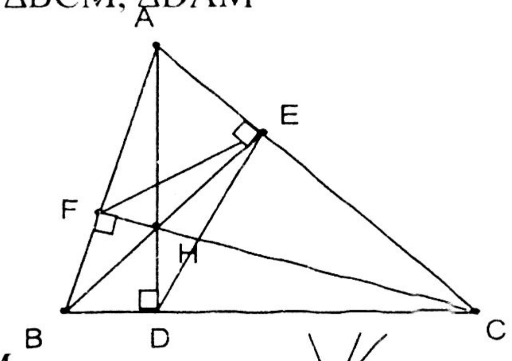
Tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HF}$;

b) *Chú ý*: Các tứ giác BDHF và CDHE lần lượt nội tiếp các đường tròn đường kính BH và CH.

Bài 4: a) Gọi S là giao điểm của AD và BC.

Giả sử SM cắt các đường tròn ngoại tiếp các ΔBCM, ΔDAM lần lượt tại N' và N''.



Ta có: SN'.SM = SA .SD;

SN''.SM = SB.SC;

Do ABCD là hình thang cân nên:

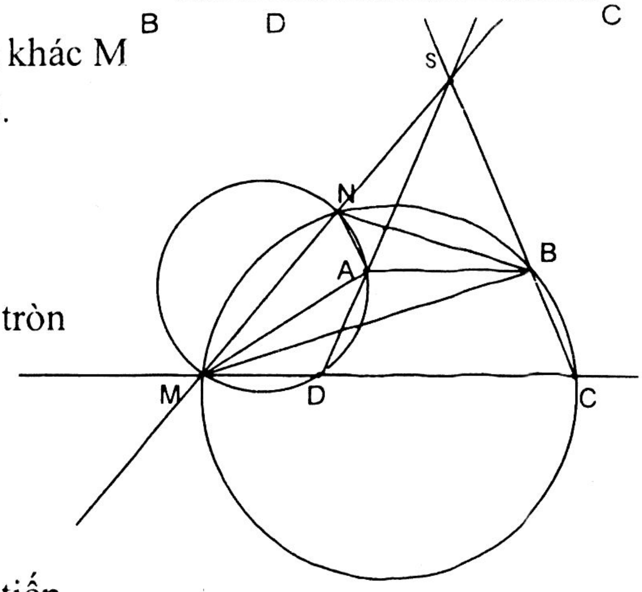
SA .SD = SB.SC;

Vậy: SN'.SM = SN''.SM

⇒ N' ≡ N'' và N', N'' là điểm chung khác M của 2 đường tròn trên ⇒ N' ≡ N''≡ N.

⇒ S, N, M thẳng hàng

Lúc này: MN luôn đi qua điểm S cố định.



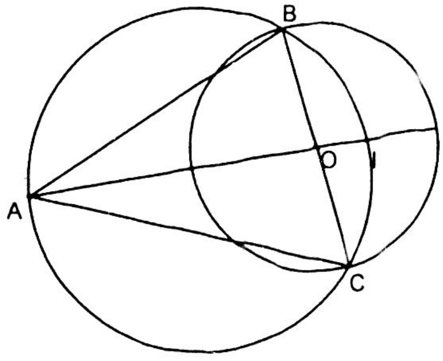
b) Ta có: MDAN nội tiếp đường tròn

⇒

$\overset{\frown}{MNA} = \overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{DCB} = \overset{\frown}{ABS}$

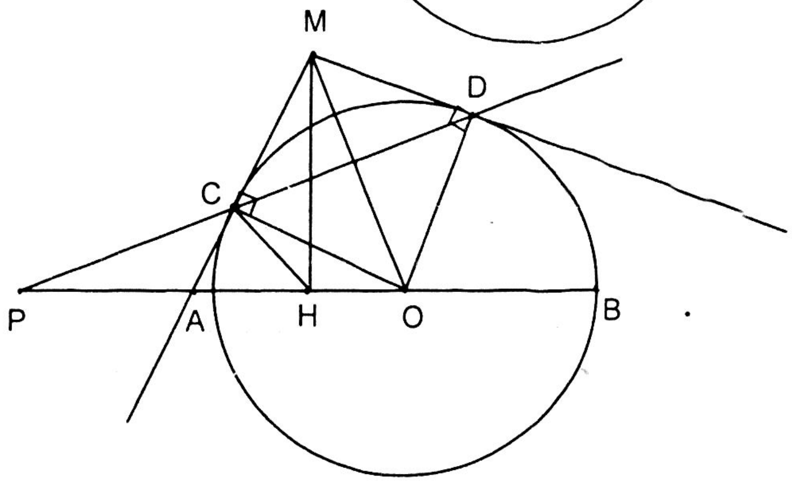
⇒ SNAB nội tiếp đường tròn

⇒ N luôn nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔSAB cố định.



Bài 5: Gọi I là giao của AO và đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó: OA.OI = OB.OC = R^2.

Mà OA cố định nên OI cố định ⇒ I cố định ⇒ đường tròn ngoại tiếp ΔABC luôn đi qua điểm I cố định.



Bài 6: a) Ta có: C, D, H cùng nhìn đoạn MO dưới

một góc vuông nên ngũ giác CMDOH nội tiếp trong đường tròn đường kính MO.

b) $PC.PD = PA.PB = R.3R = 3R^2$.

c) Ngũ giác CMDOH nội tiếp trong đường tròn: $PH.PO = PC.PD = 3R^2$.

Mặt khác: $PO = 2R$ nên

$$PH = \frac{3R}{2},$$

mà P cố định $\Rightarrow$ H cố định.

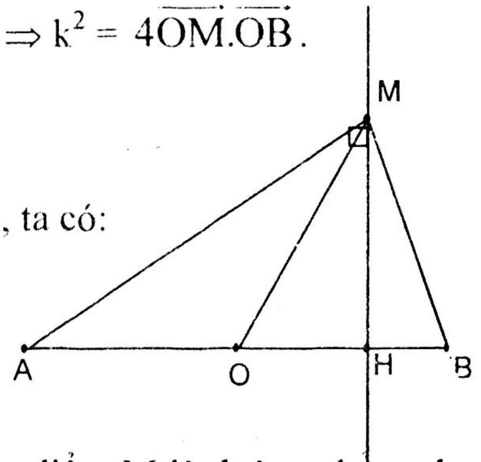
Bài 7: Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} \Rightarrow MA^2 = MO^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow MB^2 = MO^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}$$

$$\Rightarrow MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 4\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} \Rightarrow k^2 = 4\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} = \frac{k^2}{4}.$$



Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, ta có:

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\widehat{MOB} = \left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OH}\right|$$

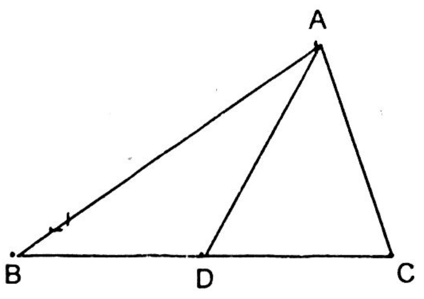
$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OH}\right| = \frac{k^2}{4}.$$

Do O, B cố định nên H cố định. Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng d vuông góc với OB ở H: $OH = \dfrac{k^2}{4.OB}$.

Bài 8: $MB^2 + MC^2 = 2MD^2 + \frac{1}{2}BC^2 \Rightarrow 2MA^2 = 2MD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

$$\Rightarrow MA^2 - MD^2 = \left(\frac{BC^2}{2}\right);$$

(đưa về bài 7).



Chương III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

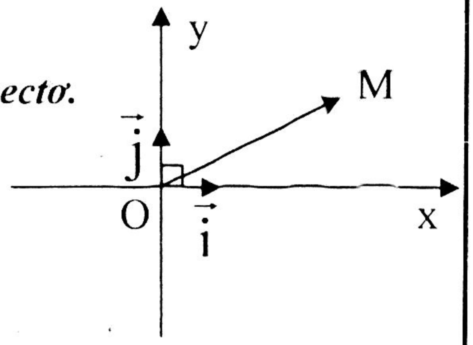
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Toạ độ của một điểm và của vectơ

– Hệ trục Oxy gồm hai trục vuông góc Ox và Oy với hai vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$ ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$)

– $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{a} = (a_1;a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$



2. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ.

Cho $A(x_A; y_A)$ *và* $B(x_B; y_B)$

$\vec{a}(a_1; a_2)$ *và* $\vec{b}(b_1; b_2)$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2);\ \vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

3. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và toạ độ trọng tâm của tam giác

– Cho hai điểm phân biệt A(x_A; y_A) và B(x_B; y_B). Gọi M(x_M; y_M) là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k (k ≠ 1)

Ta có: $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases}$

Khi M là trung điểm của đoạn thẳng AB

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

– Cho tam giác ABC, A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C). Gọi G(x_G; y_G) là trọng tâm của tam giác, ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Tìm toạ độ của một điểm, của một vectơ

Phương pháp:

– Để tìm toạ độ của điểm M(x;y) hay vectơ $\vec{a} = (x;y)$ ta tìm những hệ thức vectơ để lập một hệ phương trình hai ẩn x, y

– Những hệ thức được lập thông qua biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

Bài 1: *Cho $\vec{a} = (2;4)$, $\vec{b} = (-3;1)$, $\vec{c} = (5,-2)$. Tìm toạ độ của vectơ*

a. $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ *b.* $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$

Giải:

a. Gọi $\vec{m} = (x;y)$

$$\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \text{ suy ra } \begin{cases} x = 2.2 + 3(-3) \\ y = 2.4 + 3.1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 11 \end{cases}$$

Vậy $\vec{m} = (-5;11)$

b. Gọi $\vec{n} = (x;y)$

$$\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} \text{ suy ra } \begin{cases} x = 3.2 - 2(-3) + 5 \\ y = 3.4 - 2.1 + (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 8 \end{cases}$$

Vậy $\vec{n} = (17;8)$.

Bài 2: *Cho ba điểm A(2;1), B(2;–1), C(–2;–3)*

a. *Tìm toạ độ điểm D để ABCD là hình bình hành.*
b. *Tìm toạ độ tâm M của hình bình hành ABCD.*
c. *Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc A' của A lên BC.*

Giải:

a. Gọi D(x;y)

ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2 = -2 - x \\ -1 - 1 = -3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy D(–2;–1).

b. Gọi M(x;y) là tâm của hình bình hành ABCD thì M là trung điểm của đoạn thẳng AC

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x = \dfrac{2 + (-2)}{2} = 0 \\ y = \dfrac{1 + (-3)}{2} = -1 \end{cases}$$

Vậy M(0;–1).

c. Gọi A'(x;y) là hình chiếu vuông góc của A lên BC

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA'} // \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} // \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

$\overrightarrow{AA'} = (x - 2; y - 1)$, $\overrightarrow{BC} = (-4; -2)$, $\overrightarrow{BA'} = (x - 2; y + 1)$

Thay vào:

$$\begin{cases} (x - 2)(-4) + (y - 1)(-2) = 0 \\ (x - 2)(-2) - (y + 1)(-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{5} \\ y = -\dfrac{3}{5} \end{cases}.$$

Bài 3: *Cho các điểm A(2;3), B(9;4), M(5;y) và P(x;2)*

a. *Tìm y để tam giác AMB vuông tại M;*
b. *Tìm x để ba điểm A, P, B thẳng hàng.*

Giải:

a. Ta có $\overrightarrow{MA} = (-3; 3 - y)$, $\overrightarrow{MB} = (4; 4 - y)$

ΔAMB vuông tại M khi MA $\perp$ MB

Suy ra: $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow -12 + (3 - y)(4 - y) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow y = 0; y = 7$

b. $\overrightarrow{AB} = (7;1)$ và $\overrightarrow{AP} = (x - 2; -1)$

A, B, P thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 7(-1) - 1(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -5.$

2. Toạ độ các điểm đặc biệt của tam giác

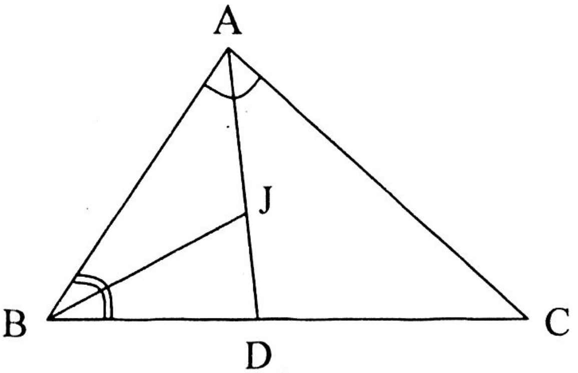
Phương pháp:

1. G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

2. H là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

3. I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$

4. D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC khi $\dfrac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\dfrac{AB}{AC}$.



5. J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC $\Leftrightarrow$ *J là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABD* $\Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{JD}} = -\dfrac{BA}{BD}$

Bài 4: *Cho tam giác ABC có A(2;6), B(–3;–4) và C(5;0)*

a. Tìm toạ độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b. Chứng minh I, G, H thẳng hàng và IH = 3IG.

c. Tìm toạ độ tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Giải:

a. Ta có $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2 - 3 + 5}{3} = \dfrac{4}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{6 - 4 + 0}{3} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Vậy, trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$

Xét điểm H(x;y) ta có $\overrightarrow{AH} = (x-2;\ y-6)$

$\overrightarrow{BC} = (8;4)$, $\overrightarrow{BH} = (x+3;\ y+4)$, $\overrightarrow{AC} = (3;-6)$

H là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8(x-2)+4(y-6)=0 \\ 3(x+3)-6(y+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=10 \\ x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy, trực tâm tam giác ABC là H(5;0)

I(x;y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-x)^2+(6-y)^2=(-3-x)^2+(-4-y)^2 \\ (2-x)^2+(6-y)^2=(5-x)^2+(0-y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=3 \\ 2x-4y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(-\frac{1}{2};1)$.

b. Ta có $\overrightarrow{IH} = (\frac{11}{2};-1)$ và $\overrightarrow{IG} = (\frac{11}{6};-\frac{1}{3})$

$\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow \begin{cases} \text{I, G, H thẳng hàng} \\ IH = 3IG. \end{cases}$

c. Gọi D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC

Ta có: $\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{AB}{AC}$

$AB = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ và $AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Suy ra: $\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

Suy ra: $$\begin{cases} x_D = \dfrac{x_B + \frac{5}{3}x_C}{1+\frac{5}{3}} = \dfrac{-3+\frac{5}{3}.5}{\frac{8}{3}} = 2 \\ y_D = \dfrac{y_B + \frac{5}{3}y_C}{1+\frac{5}{3}} = \dfrac{-4+\frac{5}{3}.0}{\frac{8}{3}} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$D(2;-\frac{3}{2})$

Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi $\dfrac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{JD}} = -\dfrac{BA}{BD}$

Ta có: $BD = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$ nên $\dfrac{BA}{BD} = 2$

$$\overrightarrow{JA} = -2\overrightarrow{JD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = \dfrac{x_A + 2x_D}{1+2} = \dfrac{2+2.2}{3} = 2 \\ y_J = \dfrac{y_A + 2y_D}{1+2} = \dfrac{6+2(-\frac{3}{2})}{3} = 1 \end{cases}$$

Vậy, tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là J(2;1).

3. Góc giữa hai vectơ và góc của tam giác.

Phương pháp:

- *Góc giữa hai vectơ* $\vec{a} = (a_1;a_2)$ *và* $\vec{b} = (b_1;b_2)$ *là*

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

- *Góc A của tam giác ABC là* $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}$.

Bài 5: *Tính góc giữa hai vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *trong các trường hợp sau:*

a. $\vec{a} = (0;-5)$, $\vec{b} = (\sqrt{3};1)$;

b. $\vec{a} = (4;3)$, $\vec{b} = (1;7)$;

c. $\vec{a} = (5;5)$, $\vec{b} = (2;-2)$.

Giải:

a. Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{-5}{5.2} = -\dfrac{1}{2}$

Suy ra $(\vec{a},\vec{b}) = 120^o$.

b. Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{4+21}{5.5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Suy ra $(\vec{a},\vec{b}) = 45^o$.

c. Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{10-10}{5\sqrt{2}.2\sqrt{2}} = 0$

Suy ra $(\vec{a},\vec{b}) = 90^o$.

Bài 6: *Cho tam giác ABC có A(2;1), B(7;6) và C(5;–6). Tính các cạnh và các góc của tam giác ABC.*

Giải:

Độ dài các cạnh của tam giác ABC là:

$$AB = \sqrt{(7-2)^2+(6-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(5-2)^2+(-6-1)^2} = \sqrt{58}$$

$$BC = \sqrt{(5-7)^2+(-6-6)^2} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

$\overrightarrow{AB} = (5;5)$, $\overrightarrow{AC} = (3;-7)$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{-20}{5\sqrt{2}.\sqrt{58}} = \frac{-2}{\sqrt{29}}$$

Suy ra: $\widehat{A} \approx 111^o48'5''$

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (-5;-5)$

$\overrightarrow{BC} = (-2;-12)$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} = \frac{70}{5\sqrt{2}.2\sqrt{37}} = \frac{7}{\sqrt{74}}$$

Suy ra: $\widehat{B} \approx 35^o32'15''$

$\widehat{C} = 180^o - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 32^o39'40''$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho ba điểm A(2;–1), B(0;3) và C(4;2)

a. Tìm toạ độ điểm M để $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} - 4\overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

b. Tìm toạ độ điểm D trên Ox để ABCD là hình thang có một cạnh đáy là AB.

c. Tìm toạ độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

d. Chứng minh ba điểm G, H, I thẳng hàng.

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hai điểm A(0;2) và B($-\sqrt{3}$;–1). Tìm toạ độ trực tâm và toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB (Khối A – 2004).

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có các đỉnh A(–1;0), B(4;0), C(0;m) với $m \neq 0$. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G (Khối D – 2004)

Bài 4. Cho tam giác ABC có A(–8;3), B(4;12) và C(4;–13)

a. Tính các góc của tam giác ABC;

b. Tìm toạ độ tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 5. Cho bốn điểm A(10;5), B(3;2), C(6;–5) và D(12;$\sqrt{13}$). Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn, tìm toạ độ tâm của đường tròn đó.

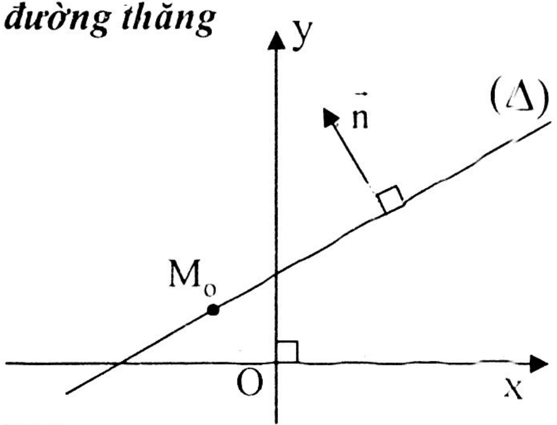
§2 PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Phương trình tổng quát của đường thẳng

1. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o; y_o)$ và nhận $\vec{n} = (A;B)$ với $A^2 + B^2 \neq 0$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình:

$$\boxed{(x - x_o)A + (y - y_o)B = 0}$$



2. Phương trình $\boxed{Ax + By + C = 0}$ *với $A^2 + B^2 \neq 0$ gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng*

Vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A;B)$

3. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ với $a.b \neq 0$ có phương trình: $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$ *gọi là phương trình theo đoạn chắn*

II. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng: $\Delta_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$\Delta_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Đặt $D = A_1B_2 - A_2B_1$; $Dx = B_1C_2 - B_2C_1$; $Dy = C_1A_2 - C_2A_1$

$$\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow D \neq 0$$

$$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ Dx \neq 0 \text{ hoặc } Dy \neq 0 \end{cases}$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow D = Dx = Dy = 0$$

Đặc biệt khi A_2, B_2, C_2 khác 0 ta có:

$$\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

$$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương pháp:

1. Viết phương trình đường thẳng Δ khi biết véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ *và điểm* $M_0(x_0; y_0)$ *của Δ:*

– Phương trình đường thẳng Δ có dạng:

$$(x - x_0)A + (y - y_0)B = 0$$

– Khai triển, rút gọn đưa về dạng tổng quát

$$Ax + By + C = 0.$$

2. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ *và song song với một đường thẳng d:* $Ax + By + C = 0$

– Phương trình đường thẳng Δ có dạng:

$$Ax + By + C' = 0 \quad (1)$$

– Thay toạ độ M_0 *vào (1) ta tìm được C'.*

Bài 1:

a. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M(2; 5) và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; -1)$.

b. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M (2; 4) và song song với đường thẳng d: $x - 2y + 4 = 0$.

Giải:

a. Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $(x - 2)5 + (-1)(y - 5) = 0$
$\Leftrightarrow 5x - y - 5 = 0$.

b. Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d nên phương trình có dạng: $x - 2y + c = 0$ (1)

Điểm M thuộc Δ nên thay toạ độ điểm M vào (1) ta được:

$$2 - 2.4 + c = 0 \Leftrightarrow c = 6$$

Vậy, phương trình của đường thẳng Δ là: $x - 2y + 6 = 0$.

Bài 2: *Cho hai điểm P(4, 0), Q(0; – 2)*

a. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm P và Q.

b. Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng PQ.

Giải:

a. Đường thẳng đi qua hai điểm P(4; 0) và Q(0; –2) là:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{(-2)} = 1 \text{ (phương trình theo đoạn chắn)}$$

$\Leftrightarrow x - 2y - 4 = 0$.

b. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng PQ ta có: M(2; –1)

$\overrightarrow{PQ} = (-4; -2)$

Đường trung trực của đoạn thẳng PQ đi qua điểm M và có véc pháp tuyến $\overrightarrow{PQ}$

Phương trình đường trung trực: $(x-2)4+(y+1)2=0$

$\Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Phương pháp:

1. Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng:

$\Delta_1: A_1x+B_1y+C_1=0$

$\Delta_2: A_2x+B_2y+C_2=0$

Ta có các trường hợp sau:

a. Δ_1 *cắt* $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$

b. $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$

c. $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

2. Toạ độ giao điểm Δ_1 *và* Δ_2 *là nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}.$$

3. Đặc điểm $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$ *với* $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1)$ *và* $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2)$.

Bài 3: *Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng cho bởi các phương trình sau:*

a. $a_1: x+2y+4=0$

$a_2: x+5y-9=0$

b. $b_1: x+y+5=0$

$b_2: 2x+2y-4=0$

c. $c_1: x+2y+1=0$

$c_2: 3x+6y+3=0$.

Giải:

a. Ta có $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{2}{5}$, suy ra a_1 cắt a_2, toạ độ giao điểm:

$$\begin{cases} x+2y+4=0 \\ x+5y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-38}{3} \\ y=\dfrac{13}{3} \end{cases}.$$

b. Ta có: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{-4}$, suy ra $b_1 \parallel b_2$.

c. Ta có: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Suy ra $c_1 \equiv c_2$.

Bài 4: *Xác định giá trị của m để hai đường thẳng sau song song với nhau.*

a: $2x + my + 1 = 0$

b: $mx + 8y + 2 = 0$.

Giải:

Ta có a // b $\Leftrightarrow \frac{2}{m} = \frac{m}{8} \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 16 \\ 4 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 4 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4$

Vậy khi $m = -4$ thì a // b.

Bài 5: *Xác định giá trị của m để hai đường thẳng sau vuông góc với nhau.*

a. $2x + my - 9 = 0$

b. $6x - y - 10 = 0$.

Giải:

Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng a là $\vec{n_1} = (2; m)$

Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng b là $\vec{n_2} = (6; -1)$

Ta có $a \perp b \Leftrightarrow \vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$

$\Leftrightarrow 12 - m = 0$

$\Leftrightarrow m = 12$

Vậy, khi $m = 12$ thì $a \perp b$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Viết phương trình của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a. Δ đi qua điểm M(2;–1) và nhận $\vec{n} = (1;1)$ làm vectơ pháp tuyến

b. Δ đi qua gốc toạ độ O(0;0) và song song với đường thẳng (d): $x + 2y - 7 = 0$.

Bài 2. Viết phương trình các đường trung trực của một tam giác có trung điểm các cạnh lần lượt là M(–1;1), N(1;9) và P(9;1).

Bài 3. Cho tam giác ABC có A(–1;2), B(2;–4) và C(1;0)

a. Viết phương trình các đường cao của tam giác ABC

b. Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC

c. Tính diện tích của tam giác ABC.

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M(1;2) và cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB nhỏ nhất.

Bài 5. Cho hai đường thẳng:

Δ_1: $4x - my + 4 - m = 0$

Δ_2: $(2m + 6)x + y - 2m - 1 = 0$

a. Biện luận theo m vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2

b. Tìm m để Δ_1 vuông góc với Δ_2.

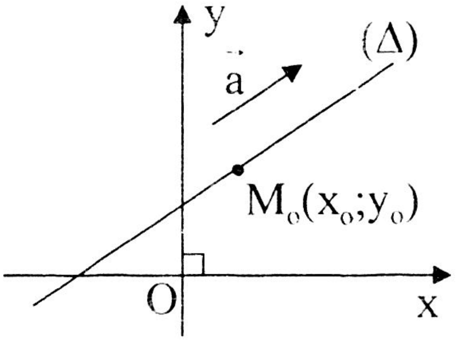
Bài 6. Cho tam giác ABC cân tại A, phương trình các đường thẳng AB, BC lần lượt là: $x - y - 5 = 0$ và $x - 3y - 1 = 0$. Đường thẳng AC đi qua điểm M(−4;1). Tìm toạ độ đỉnh C.

§3 PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o;y_o)$ và nhận vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1;a_2)$ là:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \end{cases}} \text{ với } a_1^2 + a_2^2 \neq 0$$



2. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o;y_o)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1;a_2)$ là:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}} \quad \text{với } a_1.a_2 \neq 0$$

3. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o;y_o)$ và có hệ số góc k là:

$$\boxed{y = k(x - x_o) + y_o}$$

4. Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát:

$$Ax + by + C = 0 \text{ với } A^2 + B^2 \neq 0$$

– *Vectơ chỉ phương của Δ là* $\vec{\Delta} = (-B;A)$

– *Vectơ pháp tuyến của Δ là* $\vec{n}_\Delta = (A;B)$

– $\vec{\Delta} \perp \vec{n}_\Delta$

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng Δ

Phương pháp:

– *Tìm một vectơ chỉ phương* $\vec{a} = (a_1;a_2)$ *của đường thẳng Δ*

– *Tìm một điểm* $M_o(x_o;y_o)$ *thuộc Δ*

– *Tìm phương trình tham số của Δ là* $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \end{cases}$

– *Phương trình chính tắc của Δ là* $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2}$ *với* $a_1.a_2 = 0$.

Bài 1: *Viết phương trình tham số, phương trình chính tắc trong mỗi trường hợp sau:*

a. Đường thẳng đi qua điểm M(1;–4) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2;3)$.

b. Đường thẳng đi qua điểm N(1;3) và vuông góc với đường thẳng có phương trình $2x - 5y + 4 = 0$.

c. Đường thẳng đi qua hai điểm A(1;5), B(–2;9).

Giải:

a. Phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$

Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{3}$.

b. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng d: $2x - 5y + 4 = 0$ là $\vec{n} = (2;-5)$.

Đường thẳng Δ đi qua N, vuông góc với đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{\Delta} = \vec{n}$

Phương trình tham số của Δ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-5}$.

c. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3;4)$

Đường thẳng đi qua hai điểm A, B có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$

Phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5 + 4t \end{cases}$

Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-5}{4}$.

2. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k

Phương pháp:

– *Phương trình đường thẳng đi qua điểm* $M(x_o;y_o)$, *có hệ số góc k là:* $y = k(x - x_o) + y_o$

– Δ_1 : $y = k_1x + b_1$ *có hệ số góc* k_1

Δ_2 : $y = k_2x + b_2$ *có hệ số góc* k_2

$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$

$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$

Bài 2: *Viết phương trình đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:*

a. *Δ đi qua điểm M(4; −1) và song song với đường thẳng (d): y = x + 2.*

b. *Δ đi qua điểm N(5; −1) và vuông góc với đường thẳng (d):* $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$.

Giải:

a. Δ // d nên hệ số góc của Δ là k = 1

Phương trình của đường thẳng Δ: y = 1(x − 4) − 1 = x − 5.

b. Phương trình của đường thẳng (d): $y = \frac{x}{2} + 2$ có hệ số góc $k_1 = \frac{1}{2}$

Δ ⊥ d nên hệ số góc của (Δ) là $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -2$

Phương trình của đường thẳng Δ: y = −2(x − 5) − 1 = −2x + 9.

Nhận xét 1:

Ta có thể chuyển phương trình của đường thẳng Δ về phương trình tham số như sau:

a. $\begin{cases} x = t \\ y = -5 + t \end{cases}$ *b.* $\begin{cases} x = t \\ y = 9 - 2t \end{cases}$

3. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng có phương trình tham số (chính tắc)

Phương pháp:

– Chuyển phương trình tham số (chính tắc) của hai đường thẳng về phương trình tổng quát

– Sử dụng kiến thức về vị trí tương đối của hai đường thẳng để xét.

Bài 3: *Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau và tìm toạ độ giao điểm (nếu có)*

a. a_1: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ *và* a_2: $\begin{cases} x = 8 + 6t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

b. b_1: $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ *và* b_2: $\frac{x-4}{2} = \frac{y+7}{3}$

c. c_1: $\frac{x+1}{-5} = \frac{y-2}{4}$ *và* c_2: $\frac{x}{1} = \frac{5y-6}{-4}$.

Giải:

a. Phương trình tổng quát của đường thẳng a_1: x + 2y − 14 = 0

Phương trình tổng quát của đường thẳng a_2: x + 2y − 16 = 0

Ta có: $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}\neq-\frac{14}{16}$, suy ra: $a_1 // a_2$.

b. Phương trình tổng quát của đường thẳng b_1: $x + 2y - 5 = 0$

Phương trình tổng quát của đường thẳng b_2: $3x - 2y - 26 = 0$

Ta có: $\frac{1}{3}\neq\frac{2}{-2}$, suy ra b_1 cắt b_2

Toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 3x-2y-26=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{31}{4} \\ y=-\frac{11}{8} \end{cases}.$$

c. Phương trình tổng quát của đường thẳng c_1: $4x + 5y - 6 = 0$

Phương trình tổng quát của đường thẳng c_2: $4x + 5y - 6 = 0$

Ta có: $\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{-6}{-6}$, suy ra c_1 trùng c_2.

Nhận xét 2:

Khi bài toán yêu cầu viết phương trình của đường thẳng (mà không nói cụ thể là viết phương trình tham số hoặc phương trình chính tắc) thì thông thường ta viết phương trình tổng quát của đường thẳng đó.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hai đường thẳng d_1: $2x - y - 2 = 0$ và d_2: $x + y + 3 = 0$ và điểm P(3;0). Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm P cắt (d_1), (d_2) lần lượt tại A và B. Viết phương trình đường thẳng (d), biết rằng PA = PB.

Bài 2. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết A(1;3) và hai đường trung tuyến có phương trình lần lượt: $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$.

Bài 3. Phương trình hai cạnh của một tam giác là $5x - 2y + 6 = 0$ và $4x + 7y - 21 = 0$. Viết phương trình cạnh thứ ba của tam giác biết trực tâm trùng với gốc toạ độ.

Bài 4. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết đỉnh C(4;–1). Đường cao và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh có phương trình tương ứng là: $2x - 3y + 12 = 0$ và $2x + 3y = 0$.

Bài 5. Cho hình bình hành có toạ độ một đỉnh là (4;–1), phương trình hai cạnh: $x - 3y = 0$ và $2x + 5y + 6 = 0$. Tìm toạ độ ba đỉnh còn lại của hình bình hành đó.

§4 KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Gọi φ *là góc tạo bởi hai đường thẳng* Δ_1, Δ_2 *thì* $0^o \le \varphi \le 90^o$ *và*

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

II. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

1. *Khoảng cách từ một điểm* $M_o(x_o;y_o)$ *đến đường thẳng* Δ: $Ax + By + C = 0$ *cho bởi công thức:*

$$\boxed{d(M_o,\Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

2. *Vị trí của hai điểm* $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$ *đối với đường thẳng* Δ: $Ax + By + C = 0$

– *Hai điểm M, N nằm cùng phía đối với* Δ *khi và chỉ khi:*

$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) > 0$

– *Hai điểm M, N nằm khác phía đối với* Δ *khi và chỉ khi:*

$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) < 0$

– *Hai điểm M, N nằm trên đường thẳng* Δ *khi và chỉ khi:*

$Ax_M + By_M + C = 0$

$Ax_N + By_N + C = 0.$

3. *Phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng:* Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

là:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng cho trước

Phương pháp:

– *Hai đường thẳng* Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

– *Góc giữa hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2 *là* $0^o \le \varphi \le 90^o$ *và* $cos(\Delta 1, \Delta 2) = cos\varphi = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Bài 1: *Tính góc giữa hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2 *trong mỗi trường hợp sau:*

a. Δ_1: $x - 2y + 5 = 0$ *và* Δ_2: $3x - y = 0$

b. Δ_1: $\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ *và* Δ_2: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$.

Giải:

a. Vectơ pháp tuyến của (Δ_1) là $\vec{n_1} = (1;-2)$

Vectơ pháp tuyến của (Δ_2) là $\vec{n_2} = (3;-1)$

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2) = \frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|} = \frac{5}{\sqrt{5}.\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Suy ra: $(\Delta_1, \Delta_2) = 45^o$

b. Vectơ chỉ phương của (Δ_1) là $\overrightarrow{\Delta_1} = (-5;2)$

Suy ra vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = 2;5)$

Vectơ chỉ phương của (Δ_2) là $\overrightarrow{\Delta_2} = (2;5)$

Suy ra vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (5;-2)$

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2) = \frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|} = \frac{|2.5 - 2.5|}{\sqrt{29}.\sqrt{29}} = 0$$

Suy ra: $(\Delta_1,\Delta_2) = 90^o \Leftrightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2$.

Bài 2: *Cho hai đường thẳng* Δ_1: $y = k_1x + b_1$ *và* Δ_2: $y = k_2x + b_2$ *và* $\varphi = (\Delta_1;\Delta_2)$. *Chứng minh:*

a. *Khi* $0^o \le \varphi < 90^o$ *thì* $tg\varphi = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|$.

b. *Khi* $\varphi = 90^o$ *thì* $k_1k_2 = -1$.

Giải:

Ta có: Δ_1: $y = k_1x + b_1$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (k_1;-1)$

Δ_2: $y = k_2x + b_2$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (k_2;-1)$.

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|} = \frac{|1 + k_1k_2|}{\sqrt{k_1^2 + 1}.\sqrt{k_2^2 + 1}}$$

a. Khi $0^o \le \varphi < 90^o$

Ta có: $1 + tg^2\varphi = \dfrac{1}{\cos^2\varphi} \Leftrightarrow tg^2\varphi = \dfrac{1}{\cos^2\varphi} - 1$

$$\Leftrightarrow tg^2\varphi = \frac{(k_1^2+1)(k_2^2+1)}{(1+k_1k_2)^2} - 1 = \frac{(k_1-k_2)^2}{(1+k_1k_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow tg\varphi = \left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|.$$

b. Khi $\varphi = 90^o \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow |k_1k_2 + 1| = 0 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$.

2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A($\alpha;\beta$) và tạo với đường thẳng d: $y = kx + b$ một góc φ ($0^o \le \varphi \le 90^o$)

Phương pháp:

- Nếu $\varphi = 90^o$ thì hệ số góc của đường thẳng cần viết là $k_1 = -\dfrac{1}{k}$

- Nếu $\varphi = 0$ thì hệ số góc của đường thẳng cần viết $k_1 = k$

- Nếu $0^o < \varphi < 90^o$ thì gọi d_1 là đường thẳng đi qua điểm A có hệ số góc k_1

- Phương trình của đường thẳng d_1: $y = k_1(x - \alpha) + \beta$

- $tg\varphi = \left|\dfrac{k-k_1}{1+kk_1}\right|$, suy ra k_1.

Bài 3: *Cho đường thẳng d: $3x - 2y + 5 = 0$ và điểm A(1;2). Viết phương trình đường thẳng:*

a. Đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d

b. Đi qua điểm A và song song với đường thẳng d

c. Đi qua điểm A và tạo với đường thẳng d một góc 45°

Giải:

Ta có: d: $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$ có hệ số góc $k = \dfrac{3}{2}$

a. Đường thẳng d_1 đi qua A và vuông góc với d có hệ số $k_1 = -\dfrac{1}{k} = -\dfrac{2}{3}$ có phương trình: $y = -\dfrac{2}{3}(x - 1) + 2 \Leftrightarrow 2x + 3y - 8 = 0$.

b. Đường thẳng d_1 đi qua A và song song với d có hệ số góc $k_1 = k = \dfrac{3}{2}$ có phương trình: $y = \dfrac{3}{2}(x - 1) + 2 \Leftrightarrow 3x - 2y + 1 = 0$.

c. Gọi k_1 là hệ số góc của đường thẳng d_1, đi qua A và tạo với d một góc 45^o.

Phương trình của d_1: $y = k_1(x - 1) + 2$

Ta có: $$\mathrm{tg}45^{\circ} = \left|\frac{\frac{3}{2} - k_1}{1 + \frac{3}{2}k_1}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{3 - 2k_1}{2 + 3k_1}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3 - 2k_1}{2 + 3k_1} = 1 \\ \dfrac{3 - 2k_1}{2 + 3k_1} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{1}{5} \\ k_1 = -5 \end{array}\right.$$

Phương trình của d_1: $x - 5y + 9 = 0$; $5x + y - 7 = 0$.

3. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

Phương pháp:

– Tính khoảng cách từ điểm $M_o(x_o;y_o)$ *đến đường thẳng* Δ: $Ax + By + C = 0$ *ta dùng công thức:* $$d(M_o, \Delta) = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

– Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ_1 *và* Δ *thì:*

+ Lấy một điểm $M_o \in \Delta_1$

+ Khoảng cách giữa Δ_1 *và* Δ *là:* $d(\Delta_1, \Delta) = d(M_o, \Delta)$.

Bài 4: *Tính các khoảng cách sau:*

a. *Từ điểm* $A(3;5)$ *đến đường thẳng* Δ: $4x + 3y + 1 = 0$

b. *Giữa hai đường thẳng song song* Δ_1: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

và Δ: $x - 2y - 3 = 0$.

Giải:

a. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ là:

$$d(A,\Delta) = \frac{|4.3 + 3.5 + 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{28}{5}.$$

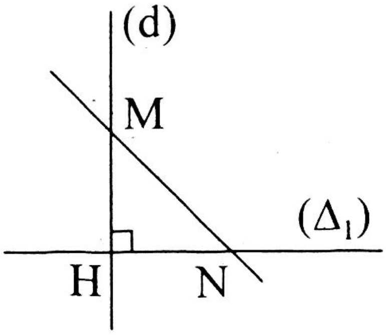
b. Ta có $\Delta_1 \,//\, \Delta$ nên $d(\Delta_1,\Delta) = \begin{cases} d(M, \Delta) \\ M \in \Delta_1 \end{cases}$

Lấy $M(2;3) \in \Delta_1$ và $d(\Delta_1,\Delta) = \dfrac{|2 - 2.3 - 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \dfrac{7}{\sqrt{5}}$.

Bài 5: *Cho hai đường thẳng* Δ_1: $2x + 3y - 6 = 0$ *và* Δ_2: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + \end{cases}$

a. Cho điểm M(2;1). Tìm điểm H thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất

b. Tìm điểm I thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ_1 bằng $\sqrt{13}$.



Giải:

a. Gọi d là đường thẳng đi qua M, vuông góc với (Δ_1)

Phương trình của d: 3x – 2y – 4 = 0

$\{H\} = d \cap \Delta_1$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24}{13} \\ y = \dfrac{10}{13} \end{cases}$

$\forall N \in \Delta_1$ ta có MN ≥ MH. Suy ra MH là đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất

Vậy: $H\left(\dfrac{24}{13};\dfrac{10}{13}\right)$.

b. Gọi $I(1 + t; 2 + t) \in \Delta_2$, khoảng cách từ điểm I đến Δ_1 là:

$$d(I,\Delta_1) = \frac{|2(1+t)+3(2+t)-6|}{\sqrt{13}}$$

$$d(I,\Delta_1) = \frac{|5t+2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5t+2=13 \\ 5t+2=-13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{11}{5} \\ t=-3 \end{array}\right.$$

Vậy, điểm I có toạ độ $\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{21}{5}\right)$ hoặc (–2;–1).

4. Viết phương trình phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng

Phương pháp:

- Phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng:

Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

Δ_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

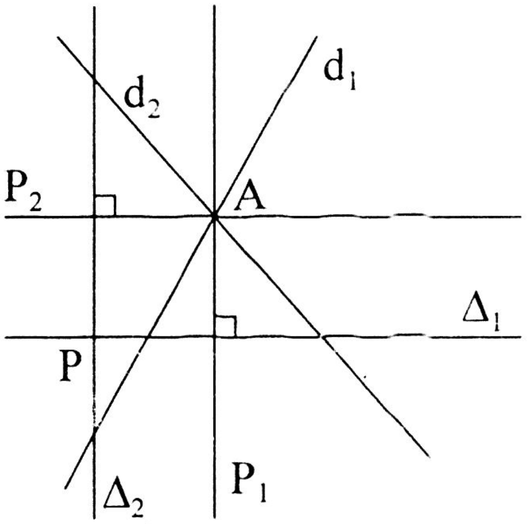
là: $$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Bài 6: *Cho hai đường thẳng d_1: $2x - y - 2 = 0$ và d_2: $2x + 4y - 7 = 0$*

a. Viết phương trình đường phân giác cuả các góc tạo bởi d_1 và d_2

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm P(3;1) cùng với d_1, d_2 tạo thành một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của d_1 và d_2.

Giải:



a. Phương trình phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2 là:

$$\frac{2x+4y-7}{\sqrt{20}} = \pm\frac{2x-y-2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-6y+3=0 & P_1 \\ 6x+2y-11=0 & P_2 \end{array}\right.$$

b. Đường thẳng Δ đi qua điểm P cùng với d_1, d_2 tạo thành một tam giác cân có đỉnh $\{A\} = d_1 \cap d_2$ thì $\Delta \perp P_1$ hoặc $\Delta \perp P_2$

Phương trình đường thẳng Δ_1: $3x + y - 10 = 0$ và Δ_2: $x - 3y = 0$.

5. Đối xứng

Phương pháp:

– Điểm A đối xứng với điểm B qua điểm I khi I là trung điểm của đoạn thẳng AB

– Điểm A đối xứng với điểm B qua đường thẳng Δ khi AB vuông góc với Δ tại I và I là trung điểm của đoạn thẳng AB

– Phép đối xứng trục (đối xứng tâm) biến một hình thành một hình bằng nó.

Bài 7: *Cho ba điểm A(–1;–2), B(4;–1), C(3;2) và đường thẳng Δ: x – 2y – 2 = 0*

a. *Chứng minh điểm A, B nằm cùng một phía đối với Δ*

b. *Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với điểm A qua Δ*

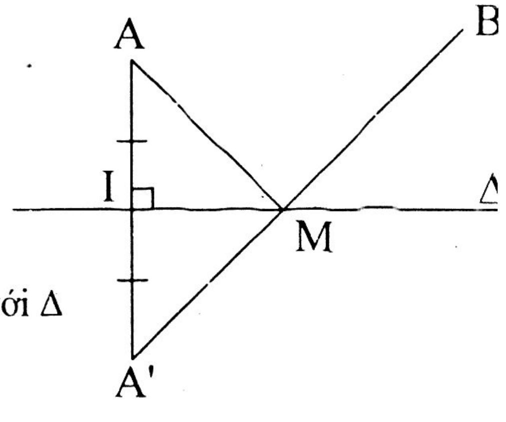
c. *Tìm trên Δ điểm M sao cho độ dài gấp khúc AMB ngắn nhất*

d. *Tìm trên Δ điểm N sao cho* $|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}|$ *đạt giá trị nhỏ nhất*

e. *Tìm trên Δ điểm S sao cho* $|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SC}|$ *đạt giá trị nhỏ nhất*

f. *Viết phương trình đường thẳng Δ_1 đối xứng với đường thẳng AC qua Δ.*

Giải:



a. Ta có:

$$(x_A - 2y_A - 2)(x_B - 2y_B - 2)$$
$$= (-1 + 4 - 2)(4 + 2 - 2) = 4 > 0$$

Suy ra: A, B nằm cùng một phía đối với Δ

b. Gọi d là đường thẳng đi qua A, vuông góc với Δ có phương trình:

$2x + y + 4 = 0$

$\{I\} = d \cap \Delta$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{6}{5} \\ y = -\dfrac{8}{5} \end{cases}$

Điểm A' đối xứng với điểm A qua Δ thì I là trung điểm của AA'.

Suy ra: $\begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_I \\ y_A + y_{A'} = 2y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A = -\dfrac{7}{5} \\ y_{A'} = 2y_I - y_A = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$

Vậy: $A'\left(-\dfrac{7}{5}; -\dfrac{6}{5}\right)$.

c. Ta có A' đối xứng với A qua Δ nên AM = A'M

AM + MB = A'M + MB ≥ A'B

⇒ A'M + MB nhỏ nhất khi A'M + MB = A'B

⇒ {A} = A'B ∩ Δ

Phương trình đường thẳng A'B: $x - 27y - 31 = 0$

Toạ độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 27y - 31 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{8}{25} \\ y = -\dfrac{29}{25} \end{cases}$

Vậy: $M\left(-\dfrac{28}{25}; -\dfrac{29}{25}\right)$.

d. Gọi D là trung điểm đoạn thẳng AC thì D(1;0)

N ∈ Δ ta có: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{ND}$

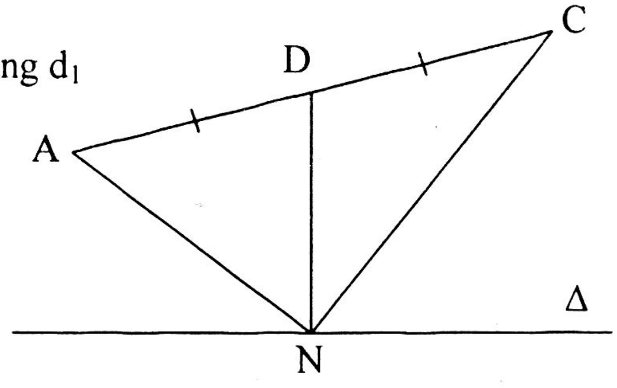
$\Rightarrow |\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}| = 2|\overrightarrow{ND}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi đoạn thẳng ND ngắn nhất

Suy ra: ND ⊥ Δ tại N

Phương trình của đường thẳng d_1 đi qua D, vuông góc với Δ là:

$2x + y - 2 = 0$

$\{N\} = d_1 \cap \Delta$



Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{5} \\ y = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$

Vậy: $N\left(\dfrac{6}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$.

e. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $G(2; -\frac{1}{3})$

$S \in \Delta$ ta có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}| = 3|\overrightarrow{SG}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi đoạn thẳng SG ngắn nhất

Suy ra $SG \perp \Delta$ tại S

Phương trình của đường thẳng d_2 đi qua G, vuông góc với Δ là:

$6x + 3y - 11 = 0$

$\{S\} = d_2 \cap \Delta$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 6x + 3y - 11 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{28}{15} \\ y = -\dfrac{1}{15} \end{cases}$

Vậy: $S\left(\dfrac{28}{15}; -\dfrac{1}{15}\right)$.

f. Phương trình của đường thẳng d_3 đi qua C, vuông góc với Δ là:

$2x + y - 8 = 0$

$\{H\} = d_3 \cap \Delta$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{18}{5} \\ y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Điểm C' đối xứng với C qua Δ khi H là trung điểm của đoạn thẳng CC'. Suy ra $C'\left(\dfrac{21}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$

Đường thẳng Δ_1 đối xứng với đường thẳng AC qua Δ đi qua điểm A' và C' có phương trình là: $x - 7y - 7 = 0$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC, biết A(1;2), B(3;4), cosA = $\frac{2}{\sqrt{5}}$ và cosB = $\frac{3}{\sqrt{10}}$

a. Gọi d là đường thẳng đi qua A và song song với trục Oy. Tính góc giữa đường thẳng d và đường thẳng AB

b. Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC.

Bài 2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(0;1) và tạo với đường thẳng d: $x + 2y + 3 = 0$ một góc 45^o.

Bài 3. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm I(−2;3) và cách đều hai điểm A(5;−1) và B(3;7).

Bài 4. Cho ba điểm A(−6;−3), B(−4;3) và C(9;2)

a. Viết phương trình đường thẳng d chứa đường phân giác trong kẻ từ A của tam giác ABC.

b. Tìm điểm D trên đường thẳng d sao cho tứ giác ABDC là hình thang.

Bài 5. Cho tam giác ABC, biết C(4;3) và phân giác trong, trung tuyến kẻ từ một đỉnh lần lượt có phương trình: $x + 2y - 5 = 0$ và $4x + 13y - 10 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.

Bài 6. Cho tam giác ABC, biết A(−1;−3), đường trung trực cạnh AB: $3x + 2y - 4 = 0$ và trọng tâm của tam giác G(4;−2). Tìm toạ độ các đỉnh B và C.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD có diện tích S = 4, biết A(1;0), B(2;0). Giao điểm I của hai đường chéo AC và BD nằm trên đường thẳng Δ: $y = x$. Tìm toạ độ các đỉnh C và D.

Bài 8. (A − 2005) Cho hai đường thẳng d_1: $x - y = 0$ và d_2: $2x + y - 1 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết rằng đỉnh A thuộc d_1, đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

Bài 9. (B − 2004) Cho hai điểm A(1;1), B(4;−3). Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

Bài 10. Cho bốn điểm A(2;1), B(0;1), C(3;5) và D(−3;−1). Tính diện tích của tứ giác ABDC.

§5 ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình đường tròn

– Phương trình đường tròn tâm I(a;b) bán kính R là:

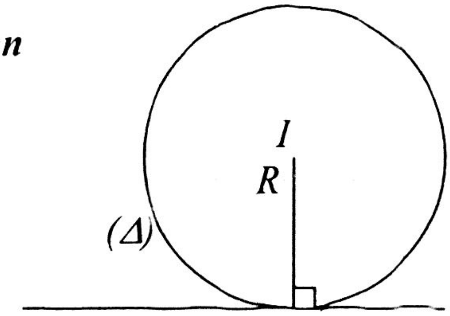
$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$$

– Phương trình $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ *với điều kiện* $A^2+B^2>C$ *là phương trình của đường tròn tâm* $I(-A;-B)$ *và có bán kính* $R=\sqrt{A^2+B^2-C}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn

$$\boxed{(\Delta) \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R}$$



B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Viết phương trình đường tròn

Phương pháp:

– Tìm toạ độ tâm I(a;b) của đường tròn (C)

– Tìm bán kính R của đường tròn (C)

– Phương trình đường tròn (C): $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Bài 1: *Viết phương trình đường tròn (C) trong mỗi trường hợp sau:*

a. (C) có tâm $I(1;3)$ *và đi qua điểm* $A(3;1)$

b. (C) có tâm $I(-2;0)$ *và tiếp xúc với đường thẳng* $\Delta: 2x+y-1=0$

c. (C) có đường kính AB với $A(1;1)$, $B(7;5)$.

Giải:

a. Bán kính của đường tròn (C) là $R = IA = 2\sqrt{2}$

Phương trình của (C): $(x-1)^2+(y-3)^2=8$.

b. Bán kính của đường tròn (C) là:

$$R=d(I,\Delta)=\frac{|2(-2)+0-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

Phương trình của (C): $(x+2)^2+y^2=5$.

c. Tâm I của đường tròn (C) là trung điểm của AB.

Ta có: $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1+7}{2}=4$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+5}{2}. = 3$$

Bán kính $R = IA = \sqrt{13}$

Phương trình của (C): $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Bài 2: *Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(2;−1) và tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox, Oy.*

Giải:

Gọi I(a;b) là tâm và R là bán kính của đường tròn (C)

Ta có: $R = d(I,Ox) = |b|$

$R = d(I,Oy) = |a|$

$R = AI$

Suy ra: $\begin{cases} |a| = |b| \\ (a-2)^2 + (b+1)^2 = a^2 \end{cases}$

– Khi b = a ta có: $\begin{cases} b = a \\ a^2 - 2a + 5 = 0 \end{cases}$ hệ phương trình vô nghiệm

– Khi b = −a ta có: $\begin{cases} b = -a \\ a^2 - 6a + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 5 \\ b = -5 \end{cases} \end{array}\right.$

Phương trình của (C): $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$

$(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$.

2. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp một tam giác

Phương pháp:

Cách 1: – *I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Leftrightarrow IA = IB = IC$*

– *Bán kính $R = IA$*

Cách 2: – *Phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ với $A^2 + B^2 > C$*

– *$A \in (C)$, $B \in (C)$, $C \in (C)$ ta được hệ phương trình bậc nhất ba ẩn A, B, C*

– *Giải hệ phương trình tìm A, B, C.*

Bài 3: *Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết A(2;6), B(−3;−4) và C(5;0).*

Giải:

Cách 1: Gọi I(a;b) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có: $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)^2 + (6-b)^2 = (-3-a)^2 + (-4-b)^2 \\ (2-a)^2 + (6-b)^2 = (5-a)^2 + (0-b)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 2a - 4b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy $I(-\dfrac{1}{2};1)$

Bán kính $R = IA = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC:

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{125}{4}.$$

Cách 2: Phương trình đường tròn (C) có dạng:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \text{ với } A^2 + B^2 > C$$

Ta có: $A \in (C)$, $B \in (C)$ và $C \in (C)$

Suy ra: $\begin{cases} 4A + 12B + C + 40 = 0 \\ -6A - 8B + C + 25 = 0 \\ 10A + C + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -1 \\ C = -30 \end{cases}$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$x^2 + y^2 + x - 2y - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{125}{4}.$$

Nhận xét 1:

Chúng ta có thể dùng máy tính bỏ túi Casio FX 500MS, FX 570MS để giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn (theo chương trình gài sẵn trong máy)

– Viết hệ về dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

– Sau khi ấn MODE^3, 1, 3, ta đưa dần dần các hệ số của hệ phương trình vào máy

– Áp dụng vào giải hệ: $\begin{cases} 4A + 12B + C = -40 \\ -6A - 8B + C = -25 \\ 10A + C = -25 \end{cases}$

– Ấn MODE^3, 1, 3: 4 $\boxed{=}$ 12 $\boxed{=}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ 40 $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ 6 $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ 8 $\boxed{=}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ 25 $\boxed{=}$ 10 $\boxed{=}$ 0 $\boxed{=}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ 25 $\boxed{=}$

KQ $A = \dfrac{1}{2}$

KQ $B = -1$

KQ $C = -30$

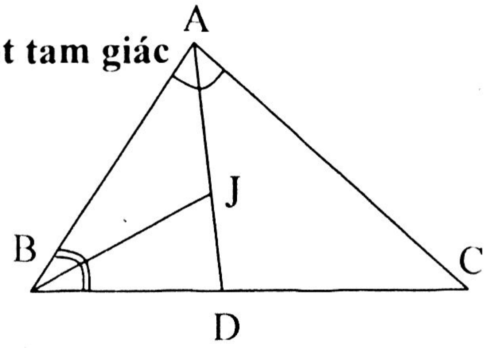
3. Viết phương trình đường tròn nội tiếp một tam giác

Phương pháp:

– J là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{JD}} = -\frac{BA}{BD}$$

– Bán kính $r = d(J, AB)$.



Bài 4: *Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC, biết A(–8;3), B(4;12) và C(4;–13).*

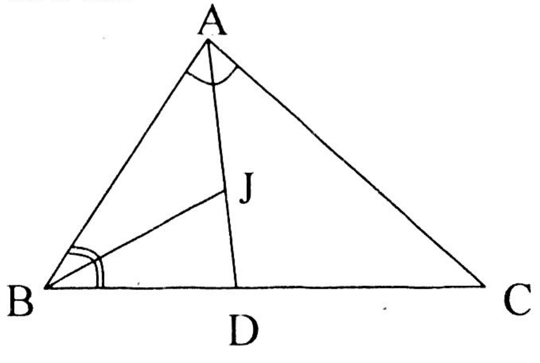
Giải:

AD là phân giác trong góc A của ΔABC thì:

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{3}{4}$$

Suy ra: $\overrightarrow{DB} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \dfrac{x_B + \frac{3}{4}x_C}{1 + \frac{3}{4}} = 4 \\ y_D = \dfrac{y_B + \frac{3}{4}y_C}{1 + \frac{3}{4}} = \dfrac{9}{7} \end{cases}$$



Vậy $D(4; \dfrac{9}{7})$

Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì $\frac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{JD}} = -\frac{BA}{BD} = -\frac{7}{5}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JA} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{JD} \Rightarrow J(-1;2)$

Phương trình đường thẳng AB: $3x - 4y + 36 = 0$

Bán kính $r = d(J,AB) = \frac{|3.(-1) - 4.2 + 36|}{\sqrt{9+16}} = 5$

Phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC là:

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25.$

4. Nhận dạng một phương trình là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính

Phương pháp:

Cách 1: – *Đưa phương trình về dạng:* $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ *(1)*

– *Kiểm tra điều kiện* $A^2 + B^2 - C > 0$

– *Nếu thoả mãn điều kiện thì (1) là phương trình đường tròn tâm* $I(-A;-B)$ *và bán kính* $R = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$.

Cách 2: – *Đưa phương trình về dạng:* $(x - a)^2 + (y - b)^2 = g(m)$ *(2)*

– *Nếu* $g(m) > 0$ *thì (2); là phương trình đường tròn tâm* $I(a;b)$, *bán kính* $R = \sqrt{g(m)}$.

Bài 5: *Cho phương trình:*

$$x^2 + y^2 + 2(m - 1)x - 2(m - 2)y + m^2 - 8m + 13 = 0 \quad (1)$$

a. *Tìm tất cả các giá trị của m để (1) là phương trình của đường tròn. Xác định tâm I và bán kính của đường tròn đó.*

b. *Tìm quỹ tích tâm của đường tròn (1) khi m thay đổi.*

Giải:

a. Phương trình (1) có dạng: $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

Với $A = m - 1$, $B = -(m - 2)$ và $C = m^2 - 8m + 13$

(1) là phương trình của đường tròn $\Leftrightarrow A^2 + B^2 - C > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 2 \end{array}\right. \quad (*)$$

Tâm $I(1 - m;m - 2)$ và bán kính $R = \sqrt{m^2 + 2m - 8}$.

b. Khi $m < -4$ hoặc $m > 2$ tâm của đường tròn (1) có toạ độ:

$$\begin{cases} x = 1 - m \\ y = m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 - x \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - x < -4 \\ 1 - x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < -1 \end{array}\right.$$

Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn (1) thuộc đường thẳng $y = -x - 1$ khi $x < -1$ hoặc $x > 5$.

5. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C)

Phương pháp:

– Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) có tâm I, bán kính R khi và chỉ khi d(I,Δ) = R.

Bài 6: *Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm A(1;3)*

a. Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C). Chứng tỏ điểm A nằm ngoài đường tròn (C).

b. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) xuất phát từ điểm A.

Giải:

a. Phương trình của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

Tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R = 2$

$$AI = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20} > 2 \Rightarrow AI > R$$

Suy ra: Điểm A nằm ngoài đường tròn (C)

b. Đường thẳng Δ đi qua A có phương trình:

$$A(x - 1) + B(y - 3) = 0 \text{ với } A^2 + B^2 > 0$$

Khoảng cách từ tâm $I(3;-1)$ đến đường thẳng Δ là:

$$d(I,\Delta) = \frac{|A(3-1) + B(-1-3)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Để Δ là tiếp tuyến của đường tròn, điều kiện cần và đủ là $d(I,\Delta) = R$

Suy ra: $\dfrac{|2A - 4B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \Leftrightarrow |A - 2B| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\Leftrightarrow B(3B - 4A) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 0 \\ 3B - 4A = 0 \end{array}\right.$$

– Khi $B = 0$, chọn $A = 1$ và được tiếp tuyến: $x - 1 = 0$

– Khi $3B - 4A = 0$, chọn $A = 3$ và $B = 4$ và được tiếp tuyến:

$3x + 4y - 15 = 0$.

Bài 7: *Cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ và*

$(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$

a. Chứng minh (C_1) tiếp xúc với (C_2)

b. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Giải:

a. Tâm và bán kính của đường tròn (C_1) là $I_1(1;1)$, $R_1 = 2$

Tâm và bán kính của đường tròn (C_2) là $I_2(4;1)$, $R_2 = 1$

Ta có: $I_1I_2 = 3 = 2 + 1 = R_1 + R_2$

Suy ra: (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2).

b. Ta có (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) nên có ba tiếp tuyến chung với (C_1) và (C_2)

Gọi Δ là đường thẳng có phương trình $y = kx + b$ hay $kx - y + b = 0$

Δ tiếp xúc với (C_1), (C_2) $\Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta) = R_1 \\ d(I_2,\Delta) = R_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|k-1+b|}{\sqrt{k^2+1}} = 2 \\ \dfrac{|4k-1+b|}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |k-1+b| = 2|4k-1+b| \\ |k-1+b| = 2\sqrt{k^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 1-7k \\ |k-1+b| = 2\sqrt{k^2+1} \end{cases} \\ \begin{cases} b = 1-3k \\ |k-1+b| = 2\sqrt{k^2+1} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ b = 1 - \dfrac{7}{2\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} k = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ b = 1 + \dfrac{7}{2\sqrt{2}} \end{cases} \end{array} \right.$$

Phương trình tiếp tuyến chung thứ nhất: $x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2} - 7 = 0$

Phương trình tiếp tuyến chung thứ hai: $-x - y + 2\sqrt{2} + 7 = 0$

– Khi Δ vuông góc với Ox thì Δ có phương trình dạng $x - x_0 = 0$

Δ tiếp xúc với (C_1), (C_2) $\Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta) = R_1 \\ d(I_2,\Delta) = R_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |1-x_0| = 2 \\ |4-x_0| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 3$$

Phương trình tiếp tuyến chung thứ ba: $x - 3 = 0$.

6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Phương pháp:

– Xét đường tròn (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

và đường thẳng Δ*:* $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$

$$- d(I,\Delta) = \frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

– $d(I,\Delta) > R \Leftrightarrow \Delta$ *không cắt (C)*

– $d(I,\Delta) = R \Leftrightarrow \Delta$ *tiếp xúc với (C)*

– $d(I,\Delta) < R \Leftrightarrow \Delta$ *cắt (C) tại hai điểm phân biệt.*

Bài 8: *Cho đường tròn (C):* $x^2 + y^2 - 4x + y + 1 = 0$ *và đường thẳng* Δ*:* $3x + y + 1 = 0$

a. Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ với đường tròn (C)

b. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng Δ.

Giải:

a. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là $I(2;-\frac{1}{2})$, $R = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ là:

$$d(I,\Delta) = \frac{|3.2 - \frac{1}{2} + 1|}{\sqrt{10}} = \frac{13}{2\sqrt{10}} > \frac{\sqrt{13}}{2} = R$$

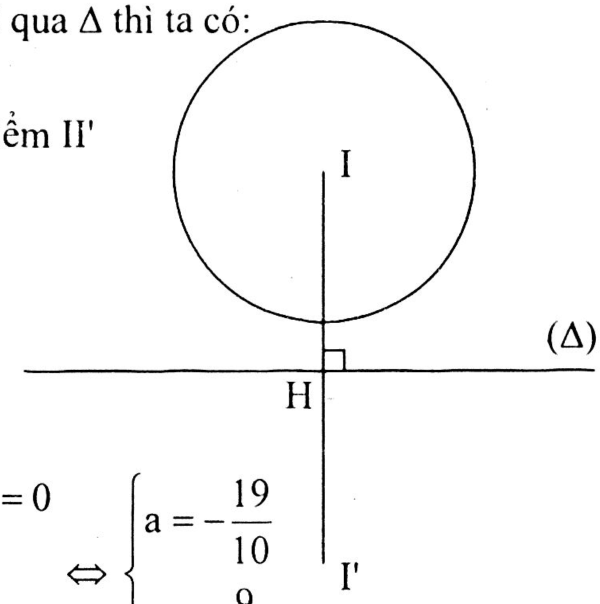
Suy ra: Δ không cắt (C).

b. Gọi điểm I'(a;b) đối xứng với I qua Δ thì ta có:

$$\begin{cases} II' \perp \Delta \\ H \in \Delta \end{cases}$$ với H là trung điểm II'

Suy ra: $$\begin{cases} \overrightarrow{II'} \perp \vec{\Delta} = (-1;3) \\ H\left(\dfrac{a+2}{2};\dfrac{b-\frac{1}{2}}{2}\right) \in \Delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(-1) + (b+\frac{1}{2})3 = 0 \\ \dfrac{3(a+2)}{2} + \dfrac{b-\frac{1}{2}}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{19}{10} \\ b = -\dfrac{9}{5} \end{cases}$$



Đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng Δ có tâm $I'\left(-\frac{19}{10};-\frac{9}{5}\right)$ và bán kính $R' = R = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Phương trình đường tròn (C'): $\left(x+\frac{19}{10}\right)^2+\left(y+\frac{9}{5}\right)^2=\frac{13}{4}$.

7. Phương tích của một điểm đối với đường tròn, trục đẳng phương của hai đường tròn, phương trình chùm đường tròn

Cho hai đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ *với* $A^2 + B^2 > C$ *và* (C_1): $x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = 0$ *với* $A_1^2 + B_1^2 > C_1$

1/ Phương tích của điểm $M_o(x_o,y_o)$ *đối với đường tròn (C) là:*

$$P_{M_o/(C)} = M_oI^2 - R^2 = x_o^2 + y_o^2 + 2Ax_o + 2By_o + C$$

2/ Trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C') là:

$$2x(A - A_1) + 2y(B - B_1) + C - C_1 = 0$$

3/ Đường tròn đi qua giao điểm của đường tròn (C) và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ *có dạng:* $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C + m(ax + by + c) = 0$

Chứng minh:

1/ Gọi $I(-A;-B)$ *là tâm của đường tròn (C) và* $R = \sqrt{A^2+B^2-C}$ *là bán kính*

Ta có: $P_{M_o/(C)} = M_oI^2 - R^2 = (-A - x_o)^2 + (-B - y_o)^2 - (A^2 + B^2 - C)$

$$= x_o^2 + y_o^2 + 2Ax_o + 2By_o + C$$

2/ Gọi $M(x,y) \in \Delta$ *là trục thẳng đứng của hai đường tròn (C) và* (C_1)

Ta có: $P_{M/(C)} = P_{M/(C_1)}$ *với* $I(-A;-B) \not\equiv I_1(-A_1;-B_1)$

Suy ra: $2x(A - A_1) + 2y(B - B_1) + C - C_1 = 0$

3/ Giao điểm của đường tròn (C) và đường thẳng Δ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Gọi $A(x_o;y_o)$, $B(x_1;y_1)$ *là hai giao điểm của (C) và Δ thì:*

$$\begin{cases} x_o^2 + y_o^2 + 2Ax_o + 2By_o + C = 0 \\ ax_o + by_o + c = 0 \end{cases}$$

và $\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + 2Ax_1 + 2By_1 + C = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \end{cases}$

Suy ra: $x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_o + 2By_o + C + m(ax_o + by_o + c) = 0$

$$x_1^2 + y_1^2 + 2Ax_1 + 2By_1 + C + m(ax_1 + by_1 + c) = 0$$

Vậy: A, B thuộc đường tròn (C_m):

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C + m(ax + by + c) = 0.$$

Bài 9: *Viết phương trình đường tròn đi qua điểm $M(1; -2)$ và các giao điểm của đường thẳng Δ: $x - 7y + 10 = 0$ với đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.*

Giải:

Cách 1: Gọi N và P là giao điểm của đường thẳng Δ với đường tròn (C), toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 7y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7y + 10 = 0 \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy: N(−3;1) và P(4;2)

Phương trình đường tròn đi qua ba điểm M, N, P có dạng:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \text{ với } A^2 + B^2 > C$$

M, N, P thuộc đường tròn nên ta có:

$$\begin{cases} 2A - 4B + C + 5 = 0 \\ -6A + 2B + C + 10 = 0 \\ 8A + 4B + C + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \\ C = -10 \end{cases}$$

Phương trình của đường tròn: $x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$

Cách 2: Đường tròn (C') đi qua giao điểm của đường thẳng Δ với đường tròn (C) nên phương trình có dạng: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 + m(x - 7y + 10) = 0$

Ta có: $M \in (C')$ nên: $-25 + 25m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Phương trình của đường tròn (C'): $x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$.

Bài 10: *Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2;1)$ và cắt đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ tại hai điểm E, F sao cho A là trung điểm của EF.*

Giải:

Tâm của đường tròn (C) là I(1;2)

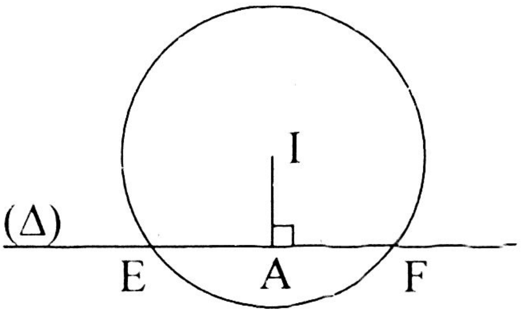
Đường thẳng Δ đi qua A, cắt (C) tại hai điểm E, F và A là trung điểm của EF nên IA ⊥ EF

Ta có: $\overrightarrow{IA} = (1;-1)$

Phương trình đường thẳng Δ:

$(x - 2)1 + (-1)(y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0$



C. BÀI TẬP

Bài 1. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I nằm trên đường thẳng d: $x - 6y - 10 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng d_1: $3x + 4y + 5 = 0$; d_2: $4x - 3y - 5 = 0$.

Bài 2. (B – 2005) Trong mặt phẳng Oxy cho A(2;0), B(6;4). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với Ox tại A và khoảng cách từ tâm của (C) đến B bằng 5.

Bài 3. Cho tam giác ABC, biết A(6;4), B(4;8) và C(–1;–7)

a. Tính góc B của tam giác ABC

b. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

c. Tính diện tích của tam giác ABC.

Bài 4. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết phương trình các đường thẳng chứa cạnh AB, BC, AC lần lượt là: $y - x - 2 = 0$; $5y - x + 2 = 0$ và $y + x - 8 = 0$

Bài 5. Cho hai đường thẳng Δ_1: $4x - 3y - 12 = 0$ và Δ_2: $4x + 3y - 12 = 0$

a. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác có ba cạnh lần lượt nằm trên các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và trục tung

b. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác nói trên.

Bài 6. Cho họ đường cong (C_m): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + m = 0$

a. Với điều kiện nào của m thì (C_m) là đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó

b. Xác định m để (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 1. Gọi đường tròn này là (C_1). Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C_1) tại điểm $A\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C_1), biết chúng vuông góc với đường thẳng d.

Bài 7. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ và điểm A(0;3)

a. Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C). Chứng minh điểm A nằm ngoài đường tròn (C)

b. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) xuất phát từ điểm A.

Bài 8. Cho hai đường tròn

(C_1): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ và (C_2): $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$

a. Tìm các giao điểm của (C_1) và (C_2)

b. Viết phương trình đường tròn đi qua hai giao điểm đó và điểm (0;1).

Bài 9. Cho các đường tròn:

(C): $x^2 + y^2 = 1$ và (C_m): $x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my = 5$

a. Chứng minh rằng có hai đường tròn (C_{m1}) và (C_{m2}) tiếp xúc với đường tròn (C) ứng với hai giá trị của m là m_1, m_2

b. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_{m1}) và (C_{m2}).

Bài 10. Cho đường tròn

(C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và đường thẳng d: $x - y - 1 = 0$

a. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d

b. Tìm toạ độ giao điểm của (C) và (C').

§6. ELIP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình chính tắc của elip

1.1.Định nghĩa: *Cho hai điểm cố định* F_1 *và* F_2 *với* $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$

Elip là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$*, trong đó a là số không đổi và* $a > c$: $(E) = \{M \mid MF_1 + MF_2 = 2a\}$.

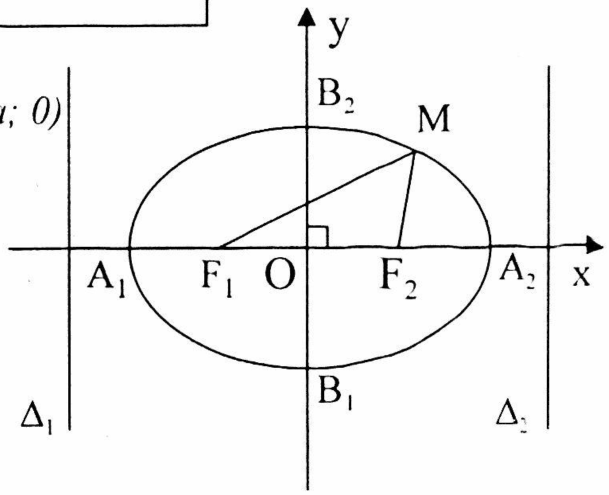
* *Hai điểm* F_1 *và* F_2 *gọi là hai tiêu điểm của elip.*

* *Khoảng cách* $F_1F_2 = 2c$ *gọi là tiêu cực.*

1.2.Phương trình chính tắc của elip:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a^2 = b^2 + c^2 \text{ và } b > 0}$$

2. Các thành phần của elip



* *Các điểm* $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$

$B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$

Gọi là các đỉnh của elip

* *Đoạn thẳng* A_1A_2 *gọi là trục lớn và* $A_1A_2 = 2a$

* *Đoạn thẳng* B_1B_2 *gọi là trục nhỏ và* $B_1B_2 = 2b$

* *Tiêu điểm*

$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

* $M \in (E)$: $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$ *và* $MF_2 = a - \frac{c}{a}x$

* *Tâm sai của elip* $e = \frac{c}{a}$

* *Đường chuẩn của elip* Δ_1: $x + \frac{a}{e} = 0$ *ứng với tiêu điểm:* $F_1(-c; 0)$ *và* Δ_2: $x - \frac{a}{e} = 0$ *ứng với tiêu điểm* $F_2(c; 0)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Xác định các thành phần của Elíp khi biết phương trình của nó

Phương pháp:

– *Biến đổi phương trình của (E) về dạng chính tắc:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } b^2 = a^2 - c^2 \text{ và } b > 0$$

– Các thành phần của (E) là: Độ dài trục lớn, trục nhỏ, tiêu điểm, tiêu cự; tâm sai; bốn đỉnh của elip, bán kính qua tiêu điểm, đường chuẩn.

Bài 1: *Tìm toạ độ các đỉnh, các tiêu điểm, tính độ dài trục lớn, trục nhỏ và tâm sai của mỗi elip sau:*

a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ *b.* $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Giải:

a. Phương trình (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ta có: $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$ và $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21}$

– Trục lớn $A_1A_2 = 2a = 10$

– Trục nhỏ $B_1B_2 = 2b = 4$

– Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{21}; 0)$ và $F_2(\sqrt{21}; 0)$

– Bốn đỉnh $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -2)$ và $B_2(0; 2)$

– Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

b. Phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$ thuộc dạng:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ta có: $\begin{cases} a^2 = \frac{1}{4} \\ b^2 = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{3} \end{matrix}$

$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36} \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{6}$

– Trục lớn $A_1A_2 = 2a = 1$

– Trục nhỏ $B_1B_2 = 2b = \frac{2}{3}$

– Tiêu điểm $F_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}; 0\right)$ và $F_2\left(\frac{\sqrt{5}}{6}; 0\right)$

– Bốn đỉnh $A_1(-\frac{1}{2};0)$, $A_2(\frac{1}{2};0)$, $B_1\left(0;\frac{-1}{3}\right)$ và $B_2\left(0;\frac{1}{3}\right)$

– Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

2. Viết phương trình chính tắc của một Elíp khi biết các yếu tố đã cho.

Phương pháp:

– Phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

– Từ các yếu tố đã cho, đi xác định a, b

– Viết phương trình chính tắc của (E).

Bài 2: *Viết phương trình chính tắc của Elip trong mỗi trường hợp sau:*

a. Độ dài trục lớn bằng 8 và tâm sai $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Một tiêu điểm $F_2(\sqrt{3};0)$ *và đi qua điểm* $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Giải:

Phương trình chính của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

a. Ta có $2a=8\Rightarrow a=4$

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow c=\frac{a\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$b^2=a^2-c^2=16-12=4$

Phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{b^2}{4}=1$.

b. Tiêu điểm $F_2(c;0)$ nên $c=\sqrt{3}$

$M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(E)\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$

$a^2=b^2+c^2=b^2+3$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}a^2=b^2+3\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2=1\\ a^2=4\end{cases}$

Phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

3. Phương trình tiếp tuyến của Elip – điều kiện tiếp xúc

Bài 3: *Cho Elip* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{b^2}=1$ *và đường thẳng Δ: y = kx + m. Chứng minh:*

a. Đường thẳng Δ tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi $k^2a^2+b^2=m^2$

b. Cho $M_0(x_0, y_0)\in(E)$*, phương trình tiếp tuyến với (E) tại* M_0 *là:*

$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Giải:

a. Thay y = kx + m vào phương trình của (E)

Ta có: $b^2x^2+a^2(kx+m)^2-a^2b^2=0$

$\Leftrightarrow x^2(b^2+k^2a^2)+2kma^2x-(b^2+k^2a^2)(a^2m^2-a^2b^2)=0$ (1)

(Δ) tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép.

Suy ra: $\Delta' = k^2m^2a^4-(b^2+k^2a^2)(a^2m^2-a^2b^2)=0$

$\Leftrightarrow k^2a^2+B^2=m^2$ (*)

b. Khi Δ tiếp xúc với (E): tại $M_0(x_0, y_0)\in(E)$

Ta có: $\begin{cases} x_0=-\dfrac{kma^2}{b^2+k^2a^2} \\ y_0=kx_0+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-\dfrac{x_0b^2}{a^2y_0} \\ m=y_0+\dfrac{x_0^2b^2}{a^2y_0} \end{cases}$

Thay vào phương trình của Δ: $xx_0b^2+yy_0a^2=a^2y_0^2+b^2x_0^2$

$M_0(x_0; y_0)\in(E)$ nên : $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \quad b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$

Phương trình của đường thẳng Δ: $xx_0b^2+yy_0a^2=a^2b^2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Nhận xét:

Cho đường thẳng Δ: Ax + By + C = 0 , $A^2+B^2\neq0$ *và (E):* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

1. Điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với (E) là: $A^2a^2+B^2b^2=C^2$.

2. Tiếp tuyến với elip tại $M_0(x_0; y_0)\in(E)$ *là:* $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Bài 4:

a. Cho elip $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$. *Viết phương trình tiếp tuyến với elip tại điểm M(4; 3) thuộc elip.*

b. Cho elip $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$. *Viết phương trình tiếp tuyến với elip, biết tiếp tuyến đi qua điểm A(4; 0).*

c. Cho elip $x^2+4y^2=32$. *Viết phương trình tiếp tuyến với elip, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng:* $x+2y-2=0$.

Giải:

a. Phương trình tiếp tuyến với elip tại M (4; 3) là:

$$\frac{4x}{32}+\frac{3y}{18}=1 \Leftrightarrow 3x+4y-24=0.$$

b. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, có hệ số góc k là:

$$y=k(x-4) \Leftrightarrow kx-y-4k=0$$

Δ là tiếp tuyến của (E) khi: $8k^2+18=16k^2 \Leftrightarrow k=\pm\frac{3}{2}$

Phương trình tiếp tuyến: $3x-2y-12=0$

$3x+2y-12=0.$

c. Tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng d nên có phương trình:

$$x+2y+C=0$$

Δ tiếp xúc với (E) khi: $1.32+4.8=C^2 \Leftrightarrow C=64 \Leftrightarrow C=\pm 8$

Phương trình tiếp tuyến: $x+2y\pm 8=0$.

Bài 5: *Cho Elip (E):* $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ *và hai điểm M (–4; m) và N (4; n). Gọi* $A_1(-4;0)$ *và* $A_2(4;0)$ *là hai đỉnh trên trục lớn của (E)*

a. Xác định toạ độ giao điểm I của hai đường thẳng A_1N *và* A_2M

b. Tìm điều kiện đối với m, n để đường thẳng MN tiếp xúc với elip

c. Cho m, n thay đổi sao cho đường thẳng M, N luôn tiếp xúc với (E). Tìm quỹ tích của điểm I.

Giải:

a. Phương trình của đường thẳng A_1N: $nx-8y+4n=0$, phương trình của đường thẳng A_2M: $mx+8y-4m=0$

$\{I\}=A_1N\cap A_2M$, toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} nx - 8y + 4n = 0 \\ mx + 8y - 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4(m-n)}{m+n} \\ y = \dfrac{m.n}{m+n} \end{cases}.$$

b. Phương trình của đường thẳng MN:

$$(n - m)x - 8y + 4n + 4m = 0$$

MN tiếp xúc với (E) nên ta có:

$$(n - m)^2.16 + 64.9 = (4n + 4m)^2$$

$$\Leftrightarrow mn = 9.$$

c. Đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E) nên ta có m.n = 9

Ta có: $\begin{cases} x = \dfrac{4(m-n)}{m+n} \\ y = \dfrac{m.n}{m+n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{4} = \dfrac{m-n}{m+n} \\ \dfrac{2y}{3} = \dfrac{6}{m+n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} = \dfrac{m^2+n^2-18}{(m+n)^2} \\ \dfrac{4y^2}{9} = \dfrac{36}{(m+n)^2} \end{cases}$

Suy ra: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{4y^2}{9} = \dfrac{m^2+n^2+18}{(m+n)^2} = \dfrac{(m+n)^2}{(m+n)^2} = 1$

Vậy, quỹ tích điểm I là elip: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1.$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho Elip (E) có khoảng cách giữa các đường chuẩn là 36 và bán kính qua tiêu của điểm M nằm trên (E) là 9 và 15

a. Viết phương trình chính tắc của (E)

b. Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại điểm M.

Bài 2. Cho Elip (E): $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

a. Xác định toạ độ các tiêu điểm và độ dài các trục của (E)

b. Điểm M thuộc (E) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông. Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M.

Bài 3. Cho Elip (E) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm C(2; 0). Tìm toạ độ các điểm A, B thuộc (E). Biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 4. Cho Elip (E): $x^2 + 4y^2 = 4$ và hai điểm M (-2; m), N (2, n) (m, n là hai tham số). Gọi $A_1(-2; 0)$; $A_2(2; 0)$ là các đỉnh trên trục lớn của (E) và I là giao điểm các đường thẳng A_1N và A_2M. Cho m, n thay đổi sao cho đường thẳng đi qua M và N luôn tiếp xúc với (E). Tìm quỹ tích điểm I.

Bài 5. Cho Elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2.

a. Cho điểm M (3; m) thuộc (E). Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M khi m > 0.

b. Cho A và B là hai điểm thuộc (E) sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$. Tính $AF_2 + BF_1$

§7. HYPERBOL

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Phương trình chính tắc của hyperbol (H):

a. Định nghĩa:

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$ Hyperbol là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó $0 < a < c$.

$$(H) = \{M \mid |MF_1 - MF_2| = 2a\}$$

$F_1F_2 = 2c$: gọi là tiêu cự của hyperbol.

b. Phương trình chính tắc:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;\ b^2 = c^2 - a^2};$$

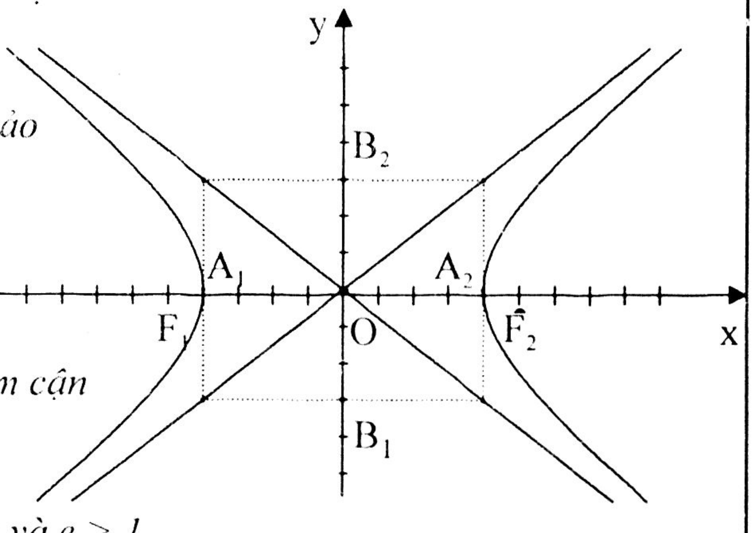
2. Các thành phần của hyperbol:

* *$F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$: 2 tiêu điểm*

* *$A_1(-a; 0)$; $A_2(a; 0)$: 2 đỉnh*

* *$A_1A_2 = 2a$: độ dài trục thực*

* *$B_1B_2 = 2b$: độ dài trục ảo*



* $y = \pm\frac{b}{a}x$ *: 2 đường tiệm cận*

* $e = \frac{c}{a}$*: tâm sai của (H) và $e > 1$*

* *$MF_1 = \left|a + \frac{cx}{a}\right|$ và $MF_2 = \left|a - \frac{cx}{a}\right|$: các bán kính qua tiêu của điểm M*

* *Δ_1:* $x + \frac{a}{e} = 0$ *: đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$*

Δ_2: $x - \frac{a}{e} = 0$*: đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_2(c; 0)$.*

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Viết phương trình chính tắc của hyperbol khi biết các yếu tố

Phương pháp:

– Từ các yếu tố đã biết, áp dụng các công thức liên quan để tìm các hệ số a, b.

– Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Bài 1: *Viết phương trình chính tắc của hyperbol (H) trong các trường hợp sau:*

a) Độ dài trục thực, trục ảo lần lượt là 10, 8

b) Có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$, một đường tiệm cận $y=\frac{2}{3}x$

c) Có tâm sai $e=\sqrt{5}$ và đi qua điểm $(\sqrt{10};6)$.

Giải:

Phương trình chính tắc của (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

a) Ta có: $\begin{cases}2a=10\\2b=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=4\end{cases}$

Vậy phương trình chính tắc của (H) là: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

b) Ta có: $\begin{cases}2c=2\sqrt{3}\\\frac{b}{a}=\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\sqrt{3}\\b=\frac{2}{3}a\end{cases}$

$a^2+b^2=c^2\Leftrightarrow a^2+\frac{4}{9}a^2=3\Leftrightarrow a^2=\frac{27}{13}$ và $b^2=\frac{12}{13}$

Vậy phương trình chính tắc của (H) là: $\frac{x^2}{\frac{27}{13}}-\frac{y^2}{\frac{12}{13}}=1$.

c) Ta có: $\frac{c}{a}=\sqrt{5}\Leftrightarrow c=\sqrt{5}a$

$(\sqrt{10};6)\in(H)$ nên: $\frac{10}{a^2}-\frac{36}{b^2}=1$

$c^2=a^2+b^2\Leftrightarrow 5a^2=a^2+b^2\Leftrightarrow b^2=4a^2$

Suy ra: $\begin{cases} \dfrac{10}{a^2} - \dfrac{36}{b^2} = 1 \\ b^2 = 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases}$

Vậy phương trình chính tắc của (H) là: $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Dạng 2: Xác định các thành phần của hyperbol khi biết phương trình của (H)

Phương pháp:

– Biến đổi phương trình về phương trình chính tắc: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

– Tìm các hệ số a, b, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

– Các thành phần của (H) là độ dài trục thực, trục ảo, tiêu điểm, tiêu cự, tâm sai, đỉnh, tiệm cận, đường chuẩn.

Bài 2: *Xác định tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh, độ dài trục thực, trục ảo, phương trình các đường tiệm cận, đường chuẩn, tâm sai của mỗi hyperbol sau:*

a. $9x^2 - 16y^2 = 144$; *b.* $4x^2 - y^2 = 1$.

Giải:

a. $9x^2 - 16y^2 = 144 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Suy ra: $\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

* Hai tiêu điểm: $F_1(-5; 0)$; $F_2(5; 0)$

* Hai đỉnh: $A_1(-4; 0)$; $A_2(2; 0)$

* Độ dài trục thực $A_1A_2 = 2a = 8$

* Độ dài trục ảo $B_1B_2 = 2b = 6$

* Phương trình 2 đường tiệm cận: $y = \pm\dfrac{3}{4}x$

* Tâm sai: $e = \dfrac{5}{4}$

* Đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_1(-5; 0)$ là Δ_1: $x + \dfrac{16}{5} = 0$

Đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_2(5; 0)$ là Δ_2: $x - \dfrac{16}{5} = 0$.

b. $4x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} - y^2 = 1$

Suy ra: $\begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{4} \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

* Hai tiêu điểm: $F_1(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}; 0)$; $F_2(\dfrac{\sqrt{5}}{2}; 0)$

* Hai đỉnh: $A_1(-\dfrac{1}{2}; 0)$; $A_2(\dfrac{1}{2}; 0)$

* Độ dài trục thực $A_1A_2 = 2a = 1$

* Độ dài trục ảo $B_1B_2 = 2b = 2$

* Phương trình 2 đường tiệm cận: $y = \pm 2x$

* Tâm sai: $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{5}$

* Đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_1(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}; 0)$ là Δ_1: $x + \dfrac{1}{2\sqrt{5}} = 0$; Đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_2(\dfrac{\sqrt{5}}{2}; 0)$ là Δ_2: $x - \dfrac{1}{2\sqrt{5}} = 0$.

Dạng 3: Phương trình tiếp tuyến – Điều kiện tiếp xúc

Bài 3: Cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng Δ: $y = kx + m$ (với $k \neq 0$)

Chứng minh: a) Đường thẳng Δ tiếp xúc với (H) khi và chỉ khi $k^2a^2 - b^2 = m^2$;

b) Cho $M_0(x_0; y_0) \in (H)$, phương trình tiếp tuyến với (H) tại M_0 là: $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

Giải:

a. Thay $y = kx + m$ vào phương trình của (H)

Ta có: $b^2x^2 - a^2(kx + m)^2 - a^2b^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(b^2 - k^2a^2) - 2kma^2x - a^2m^2 - a^2b^2 = 0$ (1)

(Δ) tiếp xúc với (H) khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép.

Suy ra: $\begin{cases} b^2 - a^2k^2 \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2k^2 - b^2 = m^2$.

b. Khi Δ tiếp xúc với (H) tại $M_0(x_0, y_0) \in (H)$

Ta có: $\begin{cases} x_0 = \dfrac{kma^2}{b^2 - k^2a^2} \\ y_0 = kx_0 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{a^2k}{m} \\ y_0 = \dfrac{y_0{}^2m}{b^2} \end{cases} \begin{cases} k = \dfrac{x_0b^2}{a^2y_0} \\ m = -\dfrac{b^2}{y_0} \end{cases}$

Thay vào phương trình của Δ: $xx_0b^2 - yy_0a^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow$ $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

Nhận xét:

Cho đường thẳng Δ: $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ và (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

1. Điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với (H) là: $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

2. Tiếp tuyến với hyperbol tại $M_0(x_0; y_0) \in (H)$ là: $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

Bài 4: *Viết phương trình tiếp tuyến Δ với hyperbol (H) biết rằng:*

a) (H): $4x^2 - y^2 = 4$ *tại* $M(2; -\sqrt{12})$.

b) (H): $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ *và Δ đi qua điểm N(3; –2).*

c) (H): $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ *và Δ vuông góc với* $2x + 5y - 1 = 0$.

Giải:

a. Phương trình chính tắc của (H): $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Tiếp tuyến Δ của (H) tại M(2; – $\sqrt{12}$) là:

$$2x + \frac{2y\sqrt{3}}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + y\sqrt{3} - 2 = 0.$$

b. Phương trình đường thẳng Δ đi qua N(3; –2) có hệ số góc k là:

$kx - y - 3k - 2 = 0$

Δ tiếp xúc với (H) khi: $5k^2 - 4 = (-3k - 2)^2$

$\Leftrightarrow k^2 + 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -1; k = -2$

Phương trình tiếp tuyến: $x + y - 1 = 0$; $2x + y - 4 = 0$.

c. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với đường thẳng $2x + 5y - 1 = 0$.

Phương trình của Δ là: $5x - 2y + C = 0$.

Δ tiếp xúc với (H) khi: $9.25 - 36.4 = C^2 \Leftrightarrow C^2 = 81 \Leftrightarrow C = \pm 9$.

Phương trình tiếp tuyến: $5x - 2y \pm 9 = 0$.

Bài 5: *Cho hyperbol (H):* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *và điểm* $M(x_0; y_0) \in (H)$.

a) *Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của (H) là một số không đổi.*

b) *Tiếp tuyến với (H) tại M cắt hai đường tiệm cận tại A và B. Chứng minh:*

   i) *MA = MB;*

   ii) *Diện tích tam giác OAB là một số không đổi.*

Giải:

a. Phương trình các đường tiệm cận của (H) là:

Δ_1: $bx + ay = 0$ và Δ_2: $bx - ay = 0$

Khoảng cách từ M đến Δ_1 và Δ_2 là:

$$d_1 = d(M, \Delta_1) = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}};\ d_2 = d(M, \Delta_2) = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

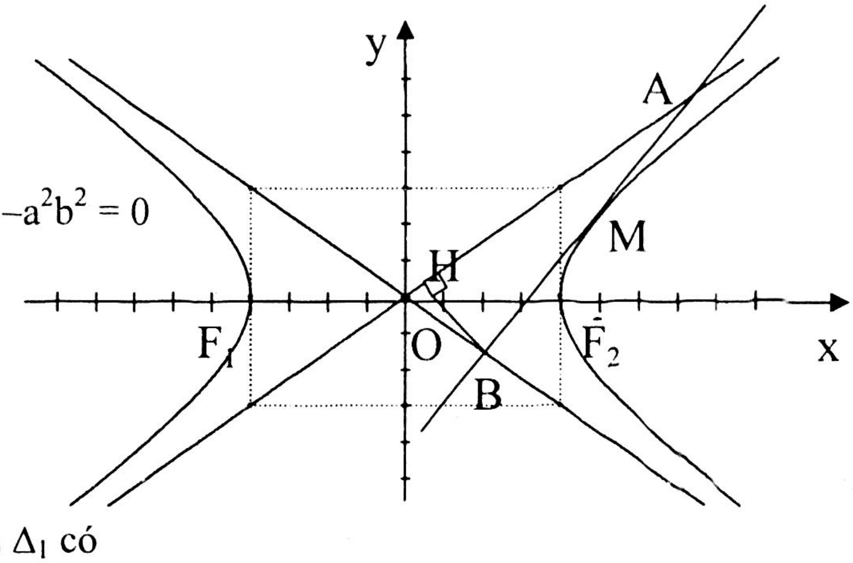
$$M(x_0; y_0) \in (H) \text{ nên: } \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$$

$$d_1.d_2 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} . \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

Vậy: $d_1.d_2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$

b. Phương trình tiếp tuyến Δ với (H) tại M là: $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \Delta$: $b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2 = 0$



Khi đó: $\{A\} = \Delta \cap \Delta_1$ có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2 = 0 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{a^2b}{bx_0 + ay_0} \\ y_A = \dfrac{-ab^2}{bx_0 + ay_0} \end{cases}$$

$\{B\} = \Delta \cap \Delta_2$ có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} b^2x_0x - a^2y_0y - a^2b^2 = 0 \\ bx - ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{a^2b}{bx_0 - ay_0} \\ y_B = \dfrac{ab^2}{bx_0 - ay_0} \end{cases}$$

Ta có:

$x_A + x_B =$

$$a^2b\left(\frac{1}{bx_0 + ay_0} + \frac{1}{bx_0 - ay_0}\right) = \frac{a^2b.2bx_0}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} = \frac{2a^2b^2x_0}{a^2b^2} = 2x_0$$

Tương tự: $y_A + y_B = 2y_0$

Vậy M là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Rightarrow$ MA = MB

Kẻ $BH \perp \Delta_1$ thì $BH = d(B, \Delta_1) = \dfrac{|bx_B + ay_B|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$BH = \frac{2a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\,|bx_0 - ay_0|};\ OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{|bx_0 + ay_0|}$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}BH.OA = ab$$

C. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

a) Tìm tâm sai và phương trình các đường tiệm cận của (H)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (H) đi qua điểm M(5; –4).

Bài 2: Cho hyperbol (H) đi qua điểm M(5; $\dfrac{9}{4}$) và nhận $F_1(5; 0)$ làm tiêu điểm của nó.

a) Viết phương trình chính tắc của (H)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (H), biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $5x + 4y - 1 = 0$.

Bài 3: Cho hyperbol (H) có tâm sai $e = \frac{5}{4}$ và một đường chuẩn $x = \frac{16}{5}$

a) Viết phương trình chính tắc của (H);

b) Đường thẳng Δ: $x - y + m = 0$ cắt (H) tại P, Q và cắt 2 đường tiệm cận ở M và N. Chứng minh: MP = NQ và $\overline{PM}.\overline{PN}$ là một hằng số.

Bài 4: Cho hyperbol (H): $9x^2 - 4y^2 = 36$ và đường thẳng Δ: $mx - y - 1 = 0$.

a) Xác định tọa độ các tiêu điểm, viết phương trình các đường tiệm cận, các đường chuẩn của (H)

b) Tìm các giá trị m để đường thẳng Δ cắt (H) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh khác nhau của (H).

Bài 5: Cho hyperbol (H): $3x^2 - y^2 = 12$.

a) Tính độ dài phần đường tiệm cận bị chắn bởi 2 đường chuẩn của (H)

b) Tính khoảng cách từ tiêu điểm của (H) đến các đường tiệm cận

c) Chứng minh rằng chân đường vuông góc hạ từ một tiêu điểm đến các đường tiệm cận nằm trên đường chuẩn ứng với các tiêu điểm đó.

§8. PARABOL

A.TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình chính tắc của Parabol (P)

a. Định nghĩa:

Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M có khoảng cách đến F bằng khoảng cách từ nó đến Δ được gọi là Parabol.

$$(P) = \{M \setminus MF = d(M,\Delta)\}$$

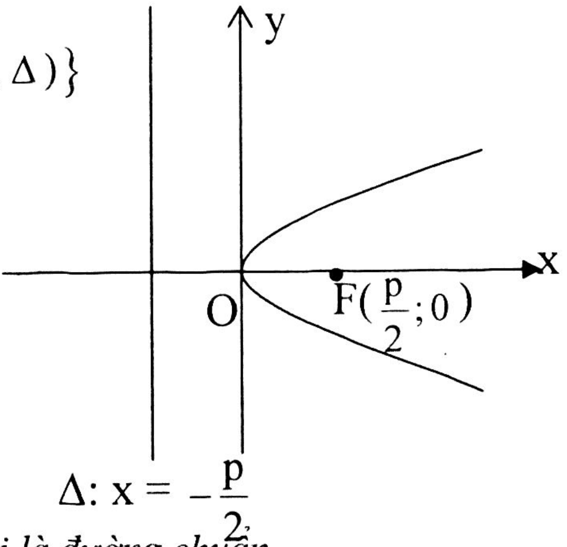
b. Phương trình chính tắc của (P)

$y^2 = 2px$ *với* $p > 0$.

2. Các thành phần của (P)

$F(\frac{p}{2};0)$ *gọi là tiêu điểm.*

d(F, Δ) = p gọi là tham số tiêu



Đường thẳng Δ: $x = -\frac{p}{2}$ *gọi là đường chuẩn.*

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Viết phương trình chính tắc của Parabol (P) khi biết các yếu tố đã cho

Phương pháp:

- *Phương trình chính tắc của (P) là* $y^2 = 2px$
- *Từ các yếu tố đã cho, đi xác định tham số tiêu p*
- *Viết phương trình chính tắc của (P)*

Bài 1: *Viết phương trình chính tắc của Parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:*

a. *(P) có tiêu điểm F(3;0)*

b. *(P) đi qua điểm M(1;−1)*

c. *(P) có đường chuẩn x = −2.*

Giải:

Phương trình chính tắc của Parabol (P) có dạng $y^2 = 2px$

a. Tiêu điểm F(3;0) nên $\frac{p}{2}=3 \Leftrightarrow p=6$. Phương trình chính tắc của Parabol (P) là $y^2=12x$.

b. M(1;−1)∈ (P) nên 1 = 2p $\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$. Phương trình chính tắc của Parabol (P) là $y^2=x$.

c. Đường chuẩn x = −2 nên $\frac{-p}{2}=-2 \Leftrightarrow p=4$. Phương trình chính tắc của Parabol (P) là $y^2=8x$.

2. Xác định các thành phần của Parabol khi biết phương trình của (P)

Phương pháp:

- Biến đổi đưa phương trình về dạng chính tắc: $y^2=2px$.

- Các thành phần của (P) là đỉnh, tiêu điểm, tham số tiêu, đường chuẩn.

Bài 2: *Chứng minh rằng đồ thị hàm số y = ax² (a ≠ 0) là một Parabol (P). Xác định tọa độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của (P).*

Giải:

Xét điểm $F(0;\frac{1}{4a})$ và đường thẳng Δ: $y+\frac{1}{4a}=0$. Lấy M(x;y) thuộc đồ thị $y=ax^2$.

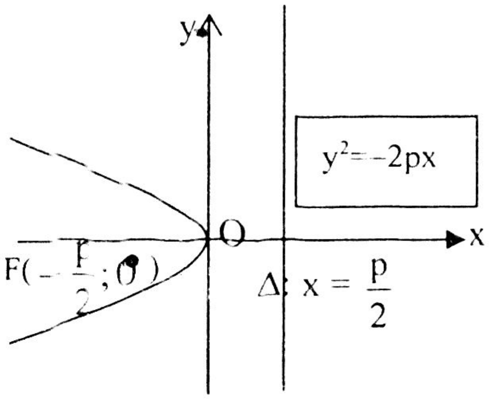
Ta có $MF^2=x^2+(ax^2-\frac{1}{4a})^2=(ax^2+\frac{1}{4a})^2 \Rightarrow MF=\left|ax^2+\frac{1}{4a}\right|$

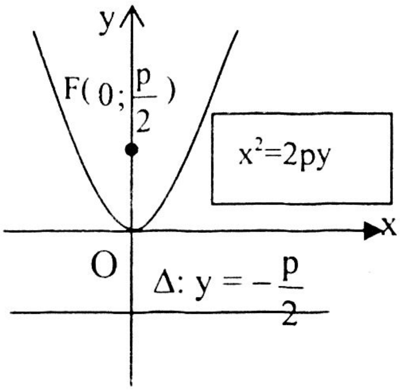
Khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ là d(M,Δ) $=\left|y+\frac{1}{4a}\right|=\left|ax^2+\frac{1}{4a}\right|$

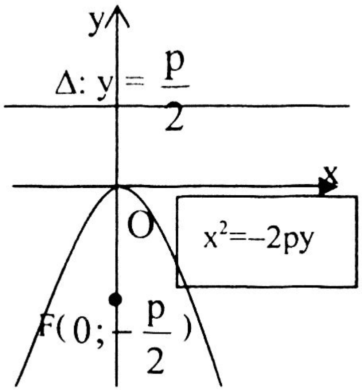
Suy ra: MF = d(M, Δ)

Vậy đồ thị hàm số y = ax² (a ≠ 0) là một Parabol có tiêu điểm $F(0;\frac{1}{4a})$, phương trình đường chuẩn Δ: $y+\frac{1}{4a}=0$.

Nhận xét: *Ngoài dạng chính tắc $y^2=2px$., Parabol còn có các dạng phương trình tương ứng với các hình sau trong hệ tọa độ Đề Các vuông góc Oxy:*


y
O
x
$y^2=-2px$
$F(-\frac{p}{2};0)$
$\Delta: x = \frac{p}{2}$


y
$F(0;\frac{p}{2})$
$x^2=2py$
O
x
$\Delta: y = -\frac{p}{2}$


y
$\Delta: y = \frac{p}{2}$
x
O
$x^2=-2py$
$F(0;-\frac{p}{2})$

Bài 3: *Tìm tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của các Parabol sau*

a $x = \frac{1}{4}y^2$ *b.* $x^2-12y=0$ *c.* $y^2+6x=0$

d $y=-4x^2$

Giải :

a. Ta có .$x=\frac{1}{4}y^2 \Leftrightarrow y^2=4x$ thuộc dạng $y^2=2px$

Suy ra $2p=4 \Leftrightarrow p=2$

Tiêu điểm F(1;0) và đường chuẩn Δ: x + 1 = 0

b. Ta có $x^2-12y=0 \Leftrightarrow x^2=12y$ thuộc dạng $x^2=2py$

Suy ra $2p=12 \Leftrightarrow p=6$

Tiêu điểm F(0;3) và đường chuẩn Δ: y + 3 =0

c. Ta có $y^2+6x=0 \Leftrightarrow y^2=-6x$ thuộc dạng $y^2=-2px$

Suy ra $-2p=--6 \Leftrightarrow p=3$.

Tiêu điểm F($-\frac{3}{2}$;0) và đường chuẩn Δ: $x-\frac{3}{2}=0$.

d. Ta có $y=-4x^2 \Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{4}y$ thuộc dạng $x^2=-2py$

Suy ra $-2p=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow p=\frac{1}{8}$.

Tiêu điểm F(0; $-\frac{1}{16}$) và đường chuẩn Δ: $y-\frac{1}{16}=0$

3. Phương trình tiếp tuyến-điều kiện tiếp xúc.

Bài 4: *Cho Parabol (P)* $y^2=2px$ $(p>0)$ *và đường thẳng* $\Delta: y=kx+m$ *với* $k\neq 0$. *Chứng minh:*

a. Đường thẳng Δ tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi $p = 2km$.

b. Cho $M_0(x_0; y_0) \in (P)$, phương trình tiếp tuyến với (P) tại M_0 là: $yy_0 = p(x + x_0)$.

Giải:

a. Khi $k \neq 0$, ta có: $x = \frac{y-m}{k}$. Thay vào $y^2 = 2p.\frac{y-m}{k}$

$\Leftrightarrow ky^2 - 2py + 2pm = 0$ (*)

(Δ) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép.

Suy ra: $\Delta' = p^2 - 2mpk = 0$

$\Leftrightarrow p = 2mk$.

b. Khi Δ tiếp xúc với (P) tại $M_0(x_0, y_0) \in (P)$

Ta có: $y_0 = \frac{p}{k} \Leftrightarrow k = \frac{p}{y_0}$.

$y_0 = 2px_0$

$m = \frac{p}{2k} = \frac{y_0}{2}$

Thay vào phương trình của Δ:

$$y = \frac{px}{y_0} + \frac{y_0}{2} \Leftrightarrow yy_0 = px + \frac{y_0^2}{2} \Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0).$$

Nhận xét:

Cho đường thẳng Δ: $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ và (P): $y^2 = 2px (p>0)$

1. Điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với (P) là: $pB^2 = 2AC$.

2. Tiếp tuyến với elip tại $M_0(x_0; y_0) \in (P)$ là: $yy_0 = p(x + x_0)$.

Bài 5: *Viết phương trình tiếp tuyến với Parabol (P), biết rằng:*

a. (P) $y^2 = x$ tại điểm M(1; 1)

b. (P) $y^2 = 4x$ và tiếp tuyến đi qua điểm N(3; 4).

Giải:

a. Phương trình chính tắc của (P): $y^2 = 2.\frac{1}{2}x$, nên tiếp tuyến với (P) tại M có phương trình $x - 2y + 1 = 0$.

b. Đường thẳng d đi qua điểm N(3;4), hệ số góc k có phương trình:

$kx - y - 3k + 4 = 0$

d tiếp xúc với (P) khi $2.(-1)^2 = 2k(-3k + 4)$

$$\Leftrightarrow 3k^2 - 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1; k = \frac{1}{3}$$

Phương trình tiếp tuyến : $x - y + 1 = 0$; $x - 3y + 9 = 0$

Bài 6: *Cho Parabol (P):* $y^2 = 4x$ *và hai đường thẳng d:* $m^2x + my + 1 = 0$ *và* d_1*:* $x - my + m^2 = 0$ *với mọi* $m \neq 0$*. Chứng minh d và* d_1 *luôn tiếp xúc với (P) tại A,B với mọi* $m \neq 0$ *và đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.*

Giải:

Ta có (P) $x = \dfrac{y^2}{4}$ và d: $x = \dfrac{-my - 1}{m^2}$; d_1: $x = my - m^2$

Phương trình tung độ giao điểm của d và (P):

$$\frac{y^2}{4} = \frac{-my-1}{m^2} \Leftrightarrow (my+2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{m}$$

Vậy d tiếp xúc với (P) tại $A\left(\dfrac{1}{m^2}; -\dfrac{2}{m}\right)$

Phương trình tung độ giao điểm của d_1 và (P)

$$\frac{y^2}{4} = my - m^2 \Leftrightarrow (y-2m)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2m$$

Vậy d_1 tiếp xúc với (P) tại $B(m^2; 2m)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{m^2-1}{m^2}; \dfrac{2(m^2+1)}{m}\right)$

Phương trình đường thẳng AB: $2(x-1) + \dfrac{(1-m^2)}{m}y = 0$ luôn đi qua điểm C(1;0) với mọi $m \neq 0$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho Parabol (P) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d: $2mx - 2y + 1 = 0$

a. Chứng minh rằng với mọi m, đường thẳng d đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt M,N. Tìm m để đoạn thẳng MN ngắn nhất.

b. Tính góc tạo bởi các tiếp tuyến của (P) tại M, tại N.

Bài 2. Cho Parabol (P) $y^2 = 8x$

a. Tìm tọa độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của (P).

b. Viết phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm M có tung độ bằng 4.

c. Giả sử đường thẳng d đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A,B có hoành độ tương ứng là x_1, x_2. Chứng minh:

$$AB = x_1 + x_2 + 4$$

Bài 3. Cho Parabol (P) $y^2 = 4x$ và đường thẳng d đi qua tiêu điểm của (P), cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ hai điểm đó đến trục của (P) là một đại lượng không đổi.

Bài 4. Cho Parabol (P) $y^2 = x$ và hai điểm A(1;-1) , B(9;3).Gọi M là điểm thuộc cung AB của (P), (Phần của (P) bị chắn bởi dây AB). Xác định vị trí của M trên cung AB sao cho tam giác MABcó diện tích lớn nhất.

Bài 5. Cho Parabol (P) nhận Ox làm trục đối xứng, có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $M(2;2\sqrt{2})$

a. Viết phương trình chính tắc của (P).

b. Đường thẳng d đi qua điểm E(2;0) , song song với đường thẳng : $2x - y + 1 = 0$ và cắt (P) tại hai điểm A,B . Tìm tọa độ của A, B.

ÔN TẬP CHƯƠNG

Bài 1: Cho tam giác ABC, biết đường thẳng chứa cạnh AB có phương trình $x + y - 9 = 0$. Các đường cao qua đỉnh A, B lần lượt có phương trình $x + 2y - 13 = 0$ và $7x + 5y - 49 = 0$.

a. Viết phương trình các đường thẳng chứa cạnh AC, BC và xác định toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b. Viết phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC.

c. Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) tại A.

Bài 2: Cho tam giác ABC, biết đỉnh A(1; 1) các đường cao qua đỉnh B và C lần lượt có phương trình: $-2x + y - 8 = 0$ và $2x + 3y - 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa đường cao qua đỉnh hA và xác định toạ độ các đỉnh B, C của tam giác ABC.

Bài 3: Cho điểm A(1; 1) và đường thẳng d: $4x + 3y - 12 = 0$

a. Gọi B, C lần lượt là giao điểm của d với các trục Ox, Oy. Xác định toạ độ trực tâm của tam giác ABC.

b. Cho điểm M chạy trên đường thẳng d. Trên nửa đường thẳng đi qua A và M lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 4$. Điểm N chạy trên đường cong nào? Viết phương trình đường cong đó.

Bài 4: Cho tam giác ABC, biết đỉnh A(2; -1) và phương trình các đường phân giác trong kẻ từ B và C lần lượt có phương trình:

d_1: $x - 2y + 1 = 0$ và d_2: $x + y + 3 = 0$

Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

Bài 5: (Khối A - 2002) Cho tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$ các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 6: (Khối B - 2002) Cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$. Phương trình đường thẳng AB là: $x - 2y + 2 = 0$ và AB = 2AD. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D. Biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

Bài 7: (Khối B - 2003) Cho tam giác ABC có AB = AC và $\widehat{BAC} = 90^0$. Biết M(1; -1) là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

Bài 8: Cho đường tròn (C) tâm I (1; -2) và bán kính R = 3.

a. Viết phương trình của đường tròn (C).

b. Viết phương trình đường thẳng chứa dây cung của đường tròn (C) và nhận gốc toạ độ O(0; 0) làm trung điểm.

Bài 9: Cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

a. Tìm tâm I và bán kính R của (C)

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ O(0; 0) và cắt (C) thành một dây cung có độ dài bằng 8.

Bài 10: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phuơng trình: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ và $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$ lần lượt có tâm I, J.

a. Chứng minh (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2). Tìm toạ độ tiếp điểm H.

b. Gọi d là một tiếp tuyến chung không đi qua tiếp điểm H của (C_1) và (C_2). Tìm toạ độ giao điểm K của d và đường thẳng IJ.

c. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua K và tiếp xúc với hai đường tròn (C_1) và (C_2) tại H.

Bài 11: Cho hai đường tròn (C_m): $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 5m^2 - 1 = 0$ và (C): $x^2 + y^2 = 1$.

a. Chứng minh (Cm) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định với mọi m.

b. Tìm m để (C_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh khi đó đường thẳng AB có phương không đổi.

Bài 12: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ và điểm A(4; -5).

a. Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C). Chứng minh điểm A nằm trong đường tròn (C).

b. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và tạo với đường tròn (C) một dây cung.

i. Có độ dài lớn nhất

ii. Có độ dài nhỏ nhất.

Bài 13: Cho Elip (E) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm A(-2; 0), M là điểm chuyển động trên (E). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên Oy. Giả sử AH cắt OM tại P. Chứng minh P luôn chạy trên một đường cong cố định. Vẽ đồ thị của đường cong đó.

Bài 14: Cho elip (E) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2.

a. Tìm điểm M thuộc (E), sao cho $MF_1 = 4MF_2$.

b. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm F_1, F_2 đến một tiếp tuyến bất kì của (E) là một hằng số.

Bài 15: (D - 2002) Cho Elip (E) $\frac{x^2}{16} = \frac{y^2}{9} = 1$

Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm NB chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định toạ độ các điểm M, N để đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 16. Cho họ đường cong (C_m): $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^2 - 25} = 1$ trong đó m là tham số và $m \neq 0$, $m \neq \pm 5$.

a. Tuỳ theo m, hãy xác định khi nào thì (C_m) là elip, khi nào thì (C_m) là hyperbol.

b. Giả sử A là một điểm tuỳ ý trên đường thẳng $x = 1$ và A không thuộc trục hoành. Chứng minh rằng với mỗi điểm A luôn có bốn đường cong của họ đi qua A. Hỏi trong số bốn đường cong đó có bao nhiêu elip và bao nhiêu hyperbol.

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

§1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

Bài 1

a. Gọi M(x;y)

Ta có $\overrightarrow{AM} = (x-2;\, y+1)$, $\overrightarrow{BM} = (x;\, y-3)$ và $\overrightarrow{CM} = (x-4;\, y-2)$

$$2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} - 4\overrightarrow{CM} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2)+3x-4(x-4)=0 \\ 2(y+1)+3(y-3)-4(y-2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+12=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-12 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy M(−12;−1).

b. Gọi D(x;0) thuộc Ox và $\overrightarrow{DC} = (4-x;\, 2)$; $\overrightarrow{AB} = (-2;\, 4)$

ABCD là hình thang có một cạnh đáy AB. Suy ra:

$$\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=-2k \\ 2=4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ k=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy D(3;0).

c. Trọng tâm $G(2;\dfrac{4}{3})$; Trực tâm $H\left(\dfrac{18}{7};\dfrac{9}{7}\right)$; Tâm $I\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{19}{14}\right)$.

d. $\overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{6}{7};-\dfrac{1}{14}\right)$ và $\overrightarrow{IG} = \left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{1}{42}\right)$

$\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow$ I, H, G thẳng hàng.

Bài 2

Gọi H(x;y) là trực tâm của tam giác OAB thì:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{OA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OB} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{OA} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}x-(y-2)=0 \\ 0(x+\sqrt{3})+2(y+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy $H(\sqrt{3};-1)$

Gọi I(x;y) là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB thì $\begin{cases} IO = IA \\ IO = IB \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OI^2 = IA^2 \\ OI^2 = IB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 + (2-y)^2 \\ x^2 + y^2 = (-\sqrt{3} - x)^2 + (-1-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $I(-\sqrt{3};1)$.

Bài 3

Trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{m}{3} \end{cases}$.

Vậy $G(1;\dfrac{m}{3})$

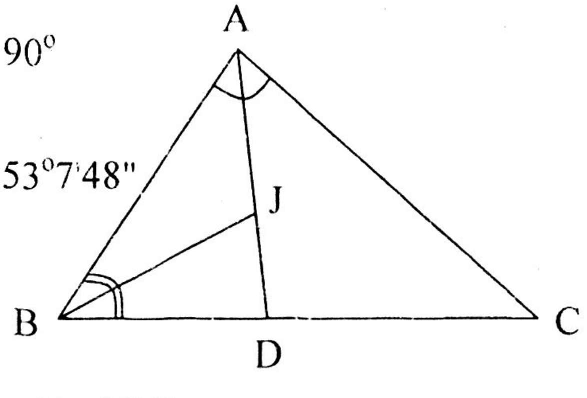
Tam giác GAB vuông tại G $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = 0$

$$\overrightarrow{GA} = \left(-2;-\frac{m}{3}\right),\ \overrightarrow{GB} = \left(3;-\frac{m}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}.$$

Bài 4

$\overrightarrow{AB} = (12;9)$, $\overrightarrow{BC} = (0;-25)$, $\overrightarrow{AC} = (12;-16)$



a. $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = 0$ suy ra $A = 90^\circ$

$\cos B = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{3}{5}$ suy ra $B \approx 53^\circ 7' 48''$

$C = 90^\circ - B = 36^\circ 52' 11''$.

b. AD phân giác góc A nên $D(4;\dfrac{9}{7})$

Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Suy ra: $\dfrac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{JD}} = -\dfrac{BA}{BD} = -\dfrac{7}{5} \Rightarrow J(-1;2)$.

Bài 5

$\overrightarrow{BA} = (7;3)$, $\overrightarrow{BC} = (3;7)$, $\overrightarrow{DA} = (-2;5-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{DC} = (-6;-5-\sqrt{13})$

Ta có: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow BA \perp BC$

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0 \Rightarrow DA \perp DC$

Suy ra: Tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn đường kính AC. Tâm của đường tròn là trung điểm I đoạn thẳng AC. Vậy $I(-2;-5)$.

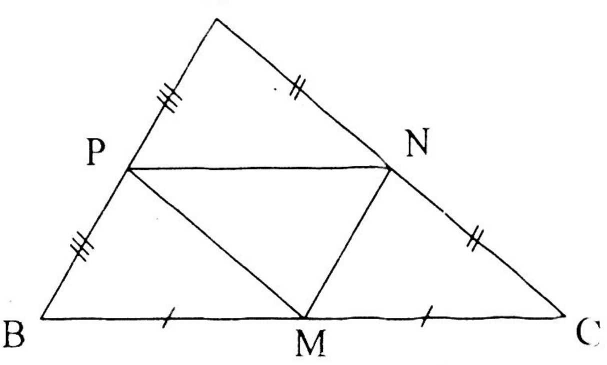
§2 PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Bài 1

a. Phương trình đường thẳng Δ: $x + y - 1 = 0$

b. Phương trình đường thẳng Δ: $x + 2y = 0$.

Bài 2



Đường trung trực cạnh AB đi qua điểm P có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{MN} = (2;8)$ có phương trình:

$$(x - 9)2 + (y - 1)8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 4y - 13 = 0$$

Phương trình đường trung trực cạnh BC: $x - y + 2 = 0$

Phương trình đường trung trực cạnh AC: $x - 1 = 0$.

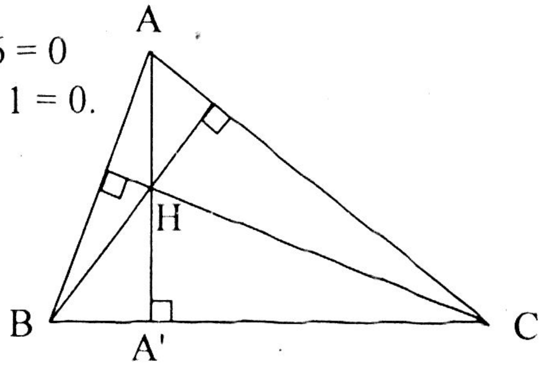
Bài 3

a. Đường cao AH đi qua A, vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{BC} = (-1;4)$ có phương trình:

$$x - 4y + 9 = 0$$

Phương trình đường cao BH: $x - y - 6 = 0$

Phương trình đường cao CH: $x - 2y - 1 = 0$.



b. Trực tâm H của tam giác ABC là giao điểm hai đường cao AH, BH

Toạ độ của H là nghiệm của:

$$\begin{cases} x - 4y + 9 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 5 \end{cases}$$

Vậy H(11;5)

c. Phương trình đường thẳng BC: $4x + y - 4 = 0$

Gọi A' là giao điểm của AH và BC

Toạ độ A' là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 4y + 9 = 0 \\ 4x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{17} \\ y = \dfrac{40}{17} \end{cases}$

$$AA' = \frac{6}{\sqrt{17}} \qquad \text{và} \quad BC = \sqrt{17}$$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}AA'.BC = 3$ (đvdt)

Bài 4

Gọi giao điểm của Δ với hai tia Ox, Oy lần lượt là A(a;0), B(0;b) với $a > 0, b > 0$

Đường thẳng (Δ) có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (1)

Do Δ đi qua M(1;2) nên thay toạ độ của điểm M vào (1): $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$

Diện tích của tam giác OAB là $S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}a.b$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si ta có:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{a.b}} \Rightarrow 1 \geq \frac{8}{a.b} \Rightarrow a.b \geq 8 \Rightarrow S \geq 4$$

S đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

Vậy, phương trình đường thẳng Δ thoả mãn đề bài là

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \qquad \text{hay} \qquad 2x + y - 4 = 0.$$

Bài 5

a. Khi $m = -2$ thì $\Delta_1 \equiv \Delta_2$

Khi $m = -1$ thì $\Delta_1 // \Delta_2$

Khi $m \neq -2$ và $m \neq -1$ thì Δ_1 cắt Δ_2

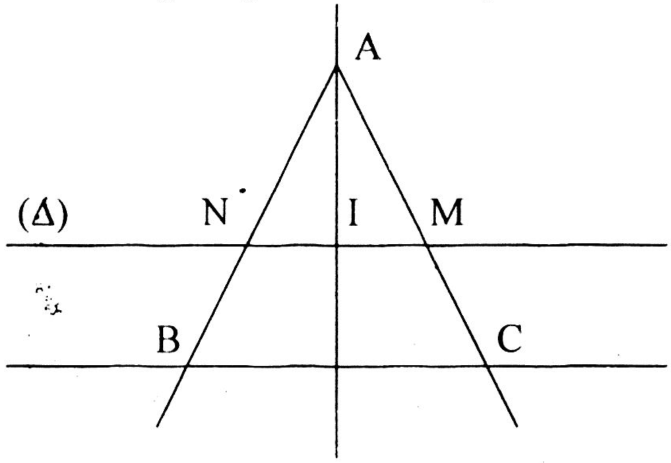
b. Khi $m = -\frac{24}{7}$ thì $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Bài 6

Phương trình đường thẳng Δ đi qua M, song song với BC: $x - 3y + 7 = 0$

Gọi N là giao điểm của Δ và AB, toạ độ N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y + 7 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 6 \end{cases}$$



Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN thì $I\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$

Phương trình đường thẳng (d) đi qua I nhận $\overrightarrow{MN} = (15;5)$ làm vectơ pháp tuyến: $3x + y - 14 = 0$

A là giao điểm của đường thẳng d và AB, toạ độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{19}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{35}{4};\frac{5}{4}\right) \perp \vec{n} = (1;7)$

Phương trình đường thẳng AM: $x + 7y - 3 = 0$

C là giao điểm của AM và BC, có toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 7y - 3 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Vậy: $C\left(\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)$

§3. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Bài 1

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm P(3;0) có hệ số góc k:

$$y = k(x - 3) \Leftrightarrow y = kx - 3k$$

d cắt d_1 tại điểm A có toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = kx - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2-3k}{2-k} \\ y = \dfrac{-4k}{2-k} \end{cases} \quad \text{với } k \neq 2$$

d cắt d_2 tại điểm B có toạ độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ y = kx - 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3k-3}{1+k} \\ y = \dfrac{-6k}{1+k} \end{cases} \quad \text{với } k \neq -1$$

Ta có: P, A, B nằm trên d và PA = PB nên P là trung điểm của AB

Suy ra: $x_P = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \dfrac{2-3k}{2-k} + \dfrac{3k-3}{1+k} = 6$

$\Rightarrow$ k = 8, suy ra (d): y = 8x – 24

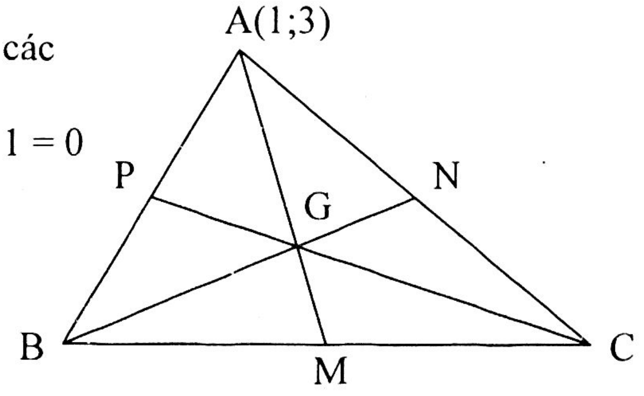
Khi d ⊥ Ox, đường thẳng d đi qua P(3;0) có phương trình x = 3, thay vào phương trình của (d_1), (d_2) ta có: $y_A = 4$; $y_B = -6$

Và $\dfrac{y_A + y_B}{2} = -1 \neq y_P = 0$

Vậy, chỉ có một đường thẳng (d) cần tìm có phương trình:

$$8x - y - 24 = 0.$$

Bài 2



Ta có điểm A(1;3) không thuộc các đường thẳng có phương trình:

$x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$

Đặt: BN: $x - 2y + 1 = 0$

CP: $y - 1 = 0$

Trọng tâm $\{G\} = BN \cap CP$ có toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Gọi $B(x_B;y_B)$ và $C(x_C;y_C)$

Ta có: $\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2 \\ y_B + y_C = 0 \end{cases}$

$B \in BN$ nên: $x_B - 2y_B + 1 = 0$

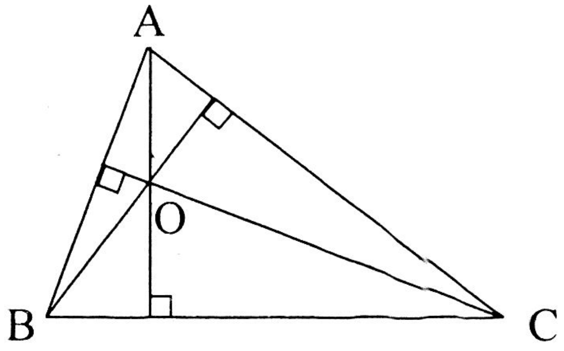
$C \in CP$ nên: $y_C - 1 = 0$

Ta có hệ: $\begin{cases} x_B + x_C = 2 \\ y_B + y_C = 0 \\ x_B - 2y_B + 1 = 0 \\ y_C - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -3 \\ y_B = -1 \\ x_C = 5 \\ y_C = 1 \end{cases}$

Vậy: B(–3;–1), C(5;1)

Phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC:

AB: $x + y - 4 = 0$
BC: $4x + y + 13 = 0$
AC: $2x - y + 1 = 0$.



Bài 3

Đặt AB: $5x - 2y + 6 = 0$

AC: $4x + 7y - 21 = 0$

$\{A\} = AB \cap AC$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 5x - 2y + 6 = 0 \\ 4x + 7y - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

Đường cao OC đi qua O, vuông góc với (AB) có phương trình:

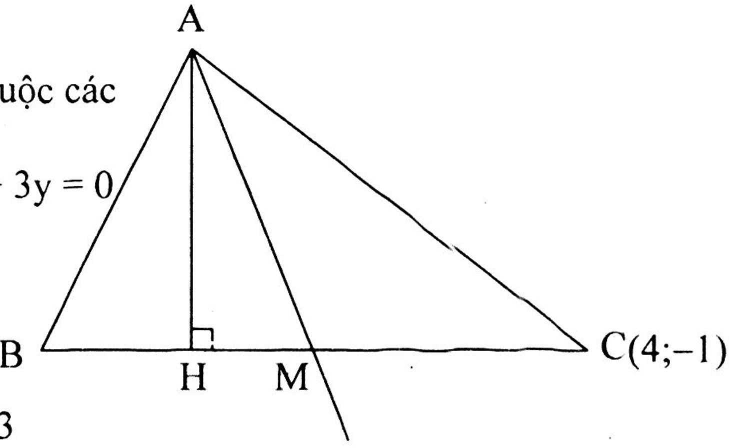
$2x + 5y = 0$

$\{C\} = OC \cap AC$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 4x + 7y - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{35}{2} \\ y = -7 \end{cases}$

Đường thẳng chứa cạnh BC, đi qua C và vuông góc với OA có phương trình: $y + 7 = 0$.

Bài 4



Ta có điểm C(4;–1) không thuộc các đường thẳng có phương trình:

$2x - 3y + 12 = 0$ và $2x + 3y = 0$

Đặt AH: $2x - 3y + 12 = 0$

AM: $2x + 3y = 0$

$\{A\} = AH \cap AM$

Toạ độ là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

Đường thẳng chứa cạnh AC có phương trình: $3x + 7y - 5 = 0$

Đường thẳng chứa cạnh BC, đi qua C, vuông góc với AH có phương trình: $3x + 2y - 10 = 0$

$\{M\} = AM \cap BC$

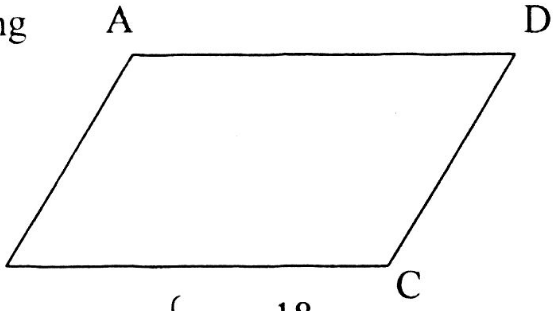
Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \end{cases}$

M là trung điểm cạnh BC nên $\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - y_C = 8 \\ y_B = 2y_M - y_C = -7 \end{cases} \Rightarrow B(8;-7)$$

Đường thẳng chứa cạnh AB có phương trình: $9x + 11y + 5 = 0$.

Bài 5



Ta có $A(4;-1)$ không thuộc các đường thẳng có phương trình:

$x - 3y = 0$ và $2x + 5y + 6 = 0$

Đặt CD: $x - 3y = 0$

BC: $2x + 5y + 6 = 0$

$\{C\} = CD \cap BC$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + 5y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{18}{11} \\ y = -\dfrac{6}{11} \end{cases}$

Vậy: $C\left(-\dfrac{18}{11}; -\dfrac{16}{11}\right)$

Ta có tứ giác ABCD là hình bình hành nên AB // CD

Đường thẳng chứa cạnh AB có phương trình: $x - 3y - 7 = 0$

$\{B\} = AB \cap BC$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 3y - 7 = 0 \\ 2x + 5y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{20}{11} \\ y = -\dfrac{19}{11} \end{cases}$

Vậy: $B\left(\dfrac{20}{11}; -\dfrac{19}{11}\right)$

Tương tự AD // BC, đường thẳng chứa cạnh AD có phương trình:

$2x + 5y - 3 = 0$

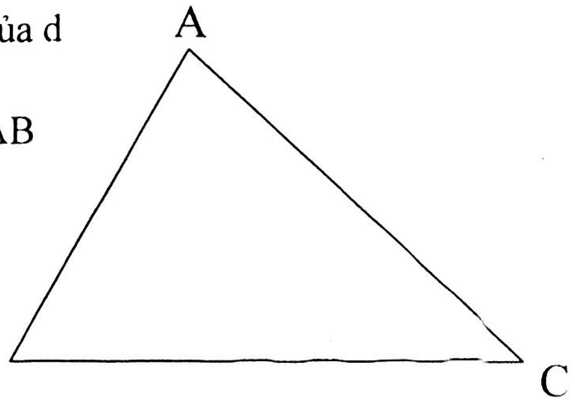
$\{D\} = AD \cap DC$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + 5y - 3 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{11} \\ y = \dfrac{3}{11} \end{cases}$

Vậy: $D\left(\dfrac{9}{11}; \dfrac{3}{11}\right)$.

§4. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

Bài 1



a. Ta có d // Oy nên vectơ pháp tuyến của d là $\vec{i} = (1;0)$

Vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB} = (2;2)$

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-1)$

$$\cos(d,AB) = \frac{|\vec{i}.\vec{n}|}{|\vec{i}|.|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Suy ra: $(d,AB) = 45^o$.

b. Phương trình đường thẳng AB: $x - y + 1 = 0$

Gọi vectơ pháp tuyến của đường thẳng AC là $\vec{n}_1 = (a_1;a_2)$ với $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$

Ta có: $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^o \Rightarrow 0^o < A < 45^o$

Suy ra: $\cos A - \frac{|\vec{n}.\vec{n}_1|}{|\vec{n}|.|\vec{n}_1|} = \frac{|a_1 - a_2|}{\sqrt{2}.\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow \quad 3a_1^2 + 3a_2^2 + 10a_1a_2 = 0$

$\Rightarrow \quad 3\frac{a_1}{a_2} + 3\frac{a_2}{a_1} + 10 = 0$ (do $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$)

Đặt $t = \frac{a_1}{a_2}$

$\Rightarrow \quad 3t + \frac{3}{t} + 10 = 0 \Rightarrow 3t^2 + 10t + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{3} \\ t = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_2 = -3a_1 \\ a_1 = -3a_2 \end{array}\right.$$

Vậy $\vec{n}_1 = (1;-3)$ hoặc $\vec{n}_1 = (-3;1)$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AC:

$x - 3y + 5 = 0$ hoặc: $3x - y - 1 = 0$

Gọi $\vec{n}_2 = (b_1;b_2)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng BC với $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$

Ta có: $\cos B = \frac{3}{\sqrt{10}} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^{o} \Rightarrow 0^{o} < B < 45^{o}$

Suy ra: $\cos B = \frac{|\vec{n}.\vec{n}_2|}{|\vec{n}|.|\vec{n}_2|} = \frac{|b_1 - b_2|}{\sqrt{2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\Leftrightarrow \quad 2b_1^2 + 5b_1b_2 + 2b_2^2 = 0$

Suy ra: $b_2 = -2b_1$ hoặc $b_1 = -2b_2$

Vậy, $\vec{n}_2 = (1;-2)$ hoặc $\vec{n}_2 = (-2;1)$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh BC:

$2x - y - 2 = 0$ hoặc $x - 2y + 5 = 0$.

Bài 2

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A(0;1) và tạo với đường thẳng d: $x + 2y + 3 = 0$ một góc 45° là: $x - 3y + 1 = 0$ hoặc $3x + y - 1 = 0$.

Bài 3

Cách 1:

Đường thẳng Δ đi qua điểm I, có hệ số góc k: $kx - y + 2k + 3 = 0$

$$d(A,\Delta) = d(B,\Delta) \Leftrightarrow \frac{|5k + 1 + 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|3k - 7 + 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -4 \\ k = 0 \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng Δ: $4x + y + 5 = 0$; $y - 3 = 0$.

Cách 2:

Đường thẳng Δ đi qua điểm I và cách đều hai điểm A, B khi:

– Δ đi qua I và song song với AB có phương trình: $4x + y + 5 = 0$

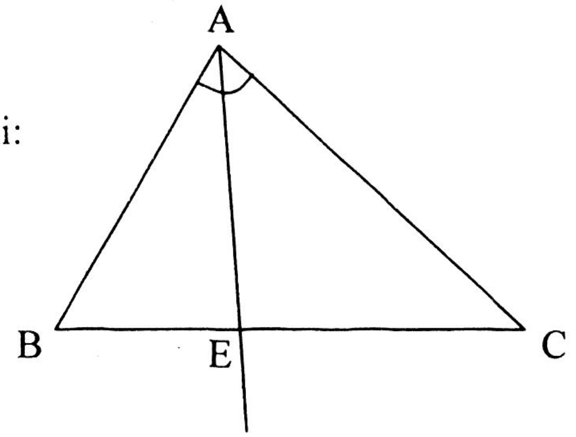
– Δ đi qua I và trung điểm M(4;3) của đoạn thẳng AB có phương trình: $y - 3 = 0$.

Bài 4

a. AE là phân giác trong góc A khi:

$$\frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{2}{5}$$

Suy ra: $E\left(-\frac{2}{7};\frac{19}{7}\right)$



Phương trình phân giác AE: $x - y + 3 = 0$.

b. Tứ giác ABDC là hình thang. Suy ra: AB // CD hoặc BD // AC

– Khi AB// CD, đường thẳng Δ đi qua C, song song với AB có phương trình: $3x - y - 25 = 0$

$\{D\} = \Delta \cap AE$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x - y - 25 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 17 \end{cases}$

Vậy: D(14;17)

– Khi AC // BD, đường thẳng Δ đi qua B, song song với AC có phương trình: $3x - 5y + 29 = 0$

$\{D\} = \Delta \cap AE$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x - 5y + 29 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 10 \end{cases}$

Vậy: D(7;10).

Bài 5

Đặt d: $x + 2y - 5 = 0$

m: $4x + 13y - 10 = 0$

Thay C(4;3) vào phương trình của d và m ta có:

$4 + 6 - 5 = 5 \neq 0$

$16 + 39 - 10 \neq 0$

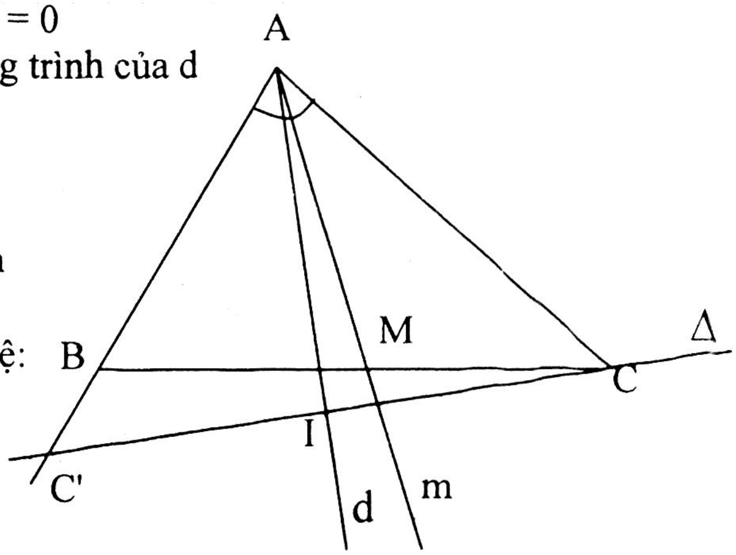
Suy ra: $C \notin d$ và $C \notin m$

Gọi $\{A\} = d \cap m$

Toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 4x + 13y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -2 \end{cases}$$



Phương trình đường thẳng AC: $x + y - 7 = 0$

Đường thẳng Δ đi qua C, vuông góc với d có phương trình:

$$2x - y - 3 = 0$$

Gọi $\{I\} = d \cap \Delta$

Toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Gọi C' đối xứng với C qua d thì I là trung điểm của CC'

Suy ra: $C'(2;-1) \in AB$

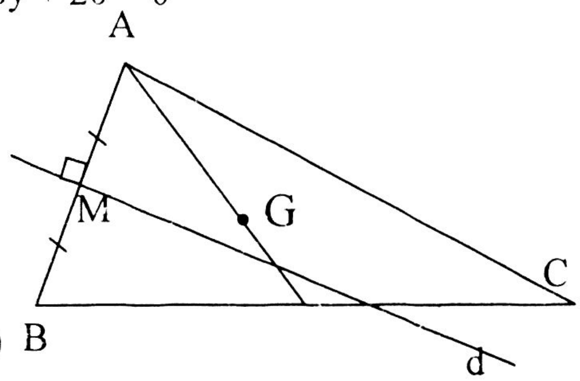
Phương trình đường thẳng AB: $x + 7y + 5 = 0$

Gọi $B(x_B;y_B)$, trung điểm M của BC thuộc trung tuyến m

Suy ra: $\begin{cases} x_B + 7y_B + 5 = 0 \\ 4\left(\dfrac{4 + x_B}{2}\right) + B\left(\dfrac{3 + y_B}{2}\right) - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = -12 \\ y_B = 1 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng BC: $x - 8y + 20 = 0$

Bài 6



Gọi $B(x_B;y_B)$ và $C(x_C;y_C)$, d là đường trung trực cạnh AB nên trung điểm M của AB thuộc d

Suy ra: $\overrightarrow{AB} \perp \vec{d} = (-2;3)$ và $M \in d$

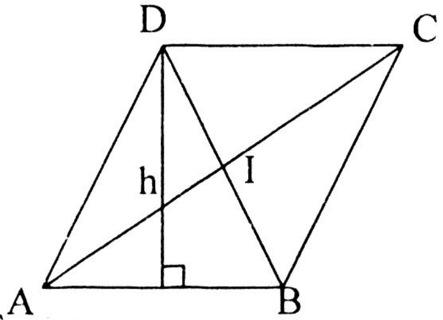
Suy ra: $\begin{cases} (x_B + 1)(-2) + (y_B + 3)3 = 0 \\ 3\left(\dfrac{-1 + x_B}{2}\right) + 2\left(\dfrac{-3 + y_B}{2}\right) - 4 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = 1 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} x_C + x_A + x_B = 3x_G \\ y_C + y_A + y_B = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = 8 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = -4 \end{cases}$

Vậy: B(5;1) và C(8;–4).

Bài 7



Ta có ABCD là hình bình hành

Suy ra: DC // AB, AB = 1, S = h.AB = 4

$\Rightarrow h = 4$

Suy ra: D, C thuộc đường thẳng Δ song song với AB và cách AB một khoảng bằng 4 phương trình Δ: y = 4 hoặc y = –4

– Khi Δ có phương trình y = 4

Gọi $C(x_C;4)$, $D(x_D;4)$

Ta có: Trung điểm I của AC thuộc đường thẳng y = x

Suy ra: $\dfrac{x_C + 1}{2} = 2 \Rightarrow x_C = 3$

Trung điểm I của BD thuộc đường thẳng y = x

Suy ra: $\dfrac{x_D + 2}{2} = 2 \Rightarrow x_D = 2$

Vậy: C(3;4) và D(2;4)

– Khi Δ có phương trình y = –4

Gọi $C(x_C;-4)$ và $D(x_D;-4)$

Trung điểm I của AC thuộc đường thẳng $y = x$

Suy ra: $\frac{x_C+1}{2} = -2 \Rightarrow x_C = -5$

Trung điểm I của BD thuộc đường thẳng $y = x$

Suy ra: $\frac{x_D+2}{2} = -2 \Rightarrow x_D = -6$

Vậy: $C(-5;-4)$ và $D(-6;-4)$.

Bài 8

Điểm $A \in d_1$: $y = x$ nên $A(t;t)$

ABCD là hình vuông nên A, C đối xứng nhau qua BD và B, D $\in$ Ox nên $C(t;-t)$

Ta có: $C \in d_2$: $2t - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy: $A(1;1)$, $C(1;-1)$

Trung điểm của AC là $I(1;0)$

Gọi $B(x_B;0)$, $D(x_D;0)$ thì I là trung điểm của BD và IB = IA

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x_B + x_D = 2 \\ |1 - x_B| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_B + x_D = 2 \\ 1 - x_B = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_B + x_D = 2 \\ 1 - x_B = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_D = 2 \\ x_B = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_D = 0 \\ x_B = 2 \end{cases} \end{array}\right. \text{Vậy: } \begin{array}{l} B(0;0);\quad D(2;0) \\ \\ B(2;0);\quad D(0;0) \end{array}.$$

Bài 9

Phương trình đường thẳng AB: $4x + 3y - 7 = 0$

Gọi điểm $C \in d$: $x - 2y - 1 = 0$ nên $C(2t + 1;t)$

$$d(C,AB) = \frac{|4(2t+1)+3t-7|}{\sqrt{16+9}} = 6 \quad \Leftrightarrow |11t - 3| = 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\frac{27}{11} \end{array}\right.$$

Vậy: $C(7;3)$ hoặc $C\left(-\frac{43}{11};-\frac{27}{11}\right)$.

Bài 10

Phương trình đường thẳng BC:

$$4x - 3y + 3 = 0$$

$$BC = \sqrt{9+16} = 5$$

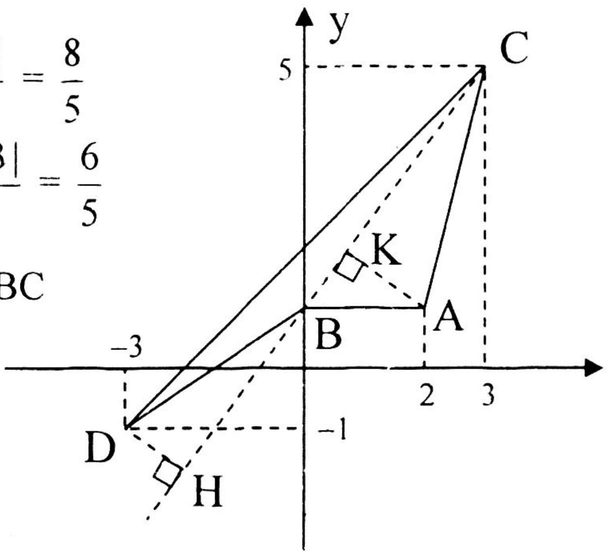
$$AK = d(A,BC) = \frac{|4.2-3.2+3|}{5} = \frac{8}{5}$$

$$DH = d(D,BC) = \frac{|4.(-3)+3+3|}{5} = \frac{6}{5}$$

$$S_{ABDC} = \frac{1}{2}AK.BC + \frac{1}{2}DH.BC$$

$$= \frac{1}{2}BC(AK + DH)$$

$$= \frac{1}{2}.5\left(\frac{8}{5}+\frac{6}{5}\right) = 7.$$



§5. ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1

Gọi I (a, b) là tâm và R là bán kính của đường tròn (C)

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} I \in d \\ d(I,d_1) = d(I,d_2) = R \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} a - 6b - 10 = 0 \\ R = \dfrac{|3a+4b+5|}{5} = \dfrac{|4a-3b-5|}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0; a = 10; R = 7 \\ a = \dfrac{10}{43}; b = \dfrac{-70}{43}; R = \dfrac{7}{43} \end{array}\right.$

Phương trình của đường tròn (C): $(x - 10)^2 + y^2 = 49$

$$\left(x - \frac{10}{43}\right)^2 + \left(y + \frac{70}{43}\right)^2 = \frac{49}{1849}\sqrt{2}.$$

Bài 2

Gọi I (a, b) là tâm và R là bán kính của đường tròn (C)

Theo bài ra ta có: $\left[\begin{array}{l} IA = R \\ IA \perp Ox \\ IB = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt{(2-a)^2 + b^2} \\ \overrightarrow{IA} \perp \vec{i} \\ (6-a)^2 + (4-b)^2 = 25 \end{cases}$

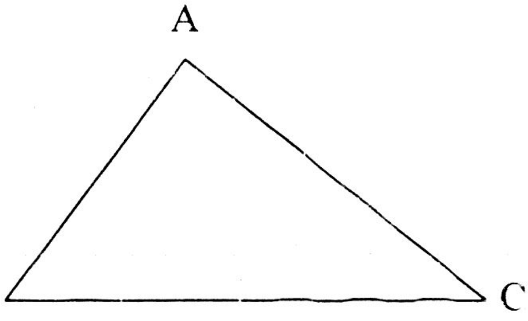
$\overrightarrow{IA} = (2 - a; -b)$ và $\vec{i} = (1;0)$

Suy ra: $\begin{cases} R = |b| \\ a = 2 \\ (4-b)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2; b = 1; R = 1 \\ a = 2; b = 7; R = 7 \end{array}\right.$

Phương trình của đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

$(x-2)^2 + (y-7)^2 = 49.$

Bài 3



a. $\text{Cos}B = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Suy ra: $B = 45^0$

b. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 72 = 0$$

c. Diện tích tam giác ABC là S = 25 (đvdt).

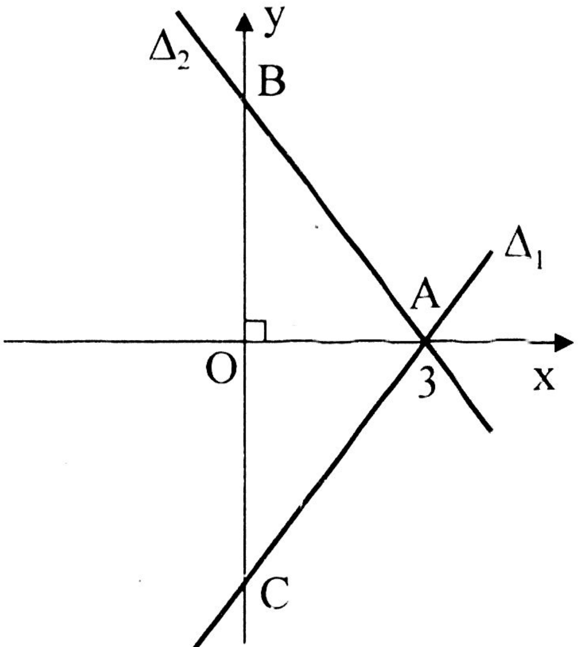
Bài 4

Toạ độ các đỉnh của tam giác ABC lần lượt là A(3, 5), B (–3; –1) và C(1,7) phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 10 = 0.$$

Bài 5

a. Toạ độ các đỉnh của tam giác ABC lần lượt là A(3;0), B(0;4) và C(0;–4)



b. Tam giác ABC cân tại A và AO ⊥ BC nên AO là phân giác góc $\widehat{BAC}$.

Phương trình phân giác góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_2 và Oy:

$$\frac{|4x+3y-12|}{5} = |x|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x - 3y + 12 = 0 & (P_1) \\ 3x + y - 4 = 0 & (P_2) \end{array}\right.$$

Đặt $P_1(C) = 0 + 4 + 12 = 16$

và $P_1(A) = 3 - 0 + 12 = 15$

$P_1(C) . P_1(A) = 16 . 15 > 0$ nên A, C nằm cùng phía đối với đường thẳng P_1 nên P_1 là phân giác ngoài góc $\widehat{ABC}$.

Suy ra phân giác góc $\widehat{ABC}$ là P_2: $3x + y - 4 = 0$

Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

Bán Kính $r = d(I; Oy) = \dfrac{4}{3}$

Phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC:

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}.$$

Bài 6

a. Để (Cm) là đường tròn khi $A^2 + B^2 - C > 0$

Suy ra $(-1)^2 + (-1)^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

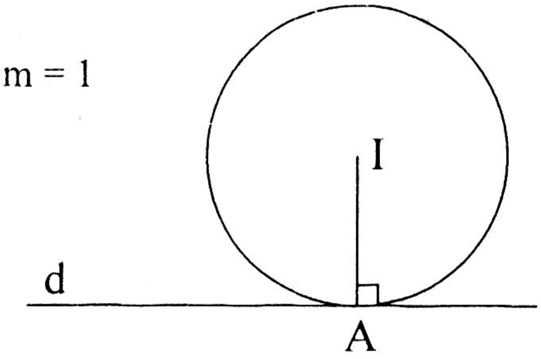
Tâm của đường tròn là $I = (1; 1)$

Bán kính $R = \sqrt{2-m}$.

b. Khi $m < 2$ thì (Cm) là đường tròn tâm I (1;1) và bán kính $R = \sqrt{2-m}$

Ta có: $R = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2-m} = 1 \Leftrightarrow m = 1$

Ta có: $\overrightarrow{IA} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$



Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C_1) tại điểm A có phương trình:

$$\left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(y - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

Vậy d: $x - y - \sqrt{2} = 0$.

c. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với đường thẳng d phương trình Δ có dạng: $x + y + C = 0$

Δ tiếp tuyến của $(C_1) \Leftrightarrow d(I,\Delta) = R \Leftrightarrow C = -2 \pm \sqrt{2}$

Phương trình của đường thẳng Δ: $x + y - 2 + \sqrt{2} = 0$

$x + y - 2 - \sqrt{2} = 0$.

Bài 7

a. Tâm và bán kính của đường tròn (C) là: I (2; −1) và R = 2

$P_{A/(C)} = 9 + 6 + 1 = 15 > 0$ nên điểm A nằm ngoài đường tròn (C)

b. Phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm A là:

$3x + 4y - 12 = 0$ và $x = 0$.

Bài 8

a. Giao điểm của (C_1) và (C_2) có toạ độ nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \\ -2x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7+6\sqrt{3}}{13};\ y = \dfrac{-17+12\sqrt{3}}{13} \\ x = \dfrac{7-6\sqrt{3}}{13};\ y = \dfrac{-17-12\sqrt{3}}{13} \end{array}\right.$$

Vậy các giao điểm $A\left(\dfrac{7+6\sqrt{3}}{13}; \dfrac{-17+12\sqrt{3}}{13}\right)$ và

$B\left(\dfrac{7-6\sqrt{3}}{13}; \dfrac{-17-12\sqrt{3}}{13}\right)$.

b. Trục đẳng phương của hai đường tròn (C_1) và (C_2) là:

Δ: $-2x + 3y + 5 = 0$ đi qua hai điểm A, B. Phương trình đường tròn (C) có dạng: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 + m(-2x + 3y + 5) = 0$

Điểm (0; 1) thuộc (C) nên ta có: $1 + 8m = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{8}$ phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm A, B và C (0; 1) là:

$$x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x + \frac{35}{8}y - \frac{27}{8} = 0$$

Bài 9

a. Đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ có tâm O(0; 0) và bán kính $R_1 = 1$

Đường tròn (C_m): $x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my = -5$

Có tâm I(m + 1; –2m) và bán kính: $R_2 = \sqrt{5m^2 + 2m - 6}$

Với $\forall m$ ta có $OI = \sqrt{5m^2 + 2m + 1}$ nên $IO < R_2$ với mọi m.

Suy ra: (C_m) và (C) chỉ xảy ra tiếp xúc trong ta có:

$$|R_2 - R_1| = OI \Leftrightarrow \left|\sqrt{5m^2 + 2m - 6} - 1\right| = \sqrt{5m^2 + 2m + 1}$$

$\Leftrightarrow \quad 5m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -1;\ m_2 = \dfrac{3}{5}$

Vậy hai đường tròn (C_{m_1}) và (C_{m_2}) tiếp xúc với đường tròn (C)

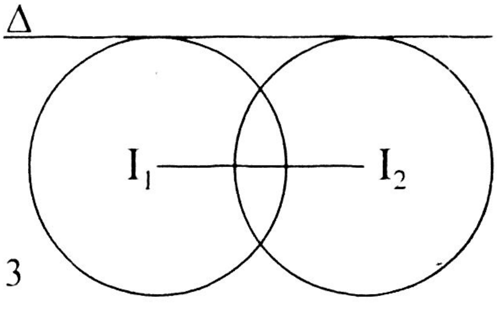
b. Phương trình đường tròn (C_{m_1}): $x^2 + (y-2)^2 = 9$

Tâm $I_1(0; 2)$ và bán kính $R_1 = 3$

Phương trình đường tròn (C_{m_2}):

$$\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{6}{5}\right)^2 = 9$$

Tâm $I_2\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ và bán kính $R_2 = 3$



Ta có: $I_1I_2 = \dfrac{8}{\sqrt{5}} < R_1 + R_2 = 6$. Suy ra (C_{m_1}) cắt (C_{m_2}).

Vậy có hai tiếp tuyến chung với (C_{m_1}), (C_{m_2})

Mặt khác: $R_1 = R_2$, suy ra tiếp tuyến chung song song với đường thẳng I_1I_2.

Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $2x + y + c = 0$

$$d(I_1, \Delta) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|2 + C|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow C = -2 \pm 3\sqrt{5}$$

Phương trình tiếp tuyến chung: $2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0$.

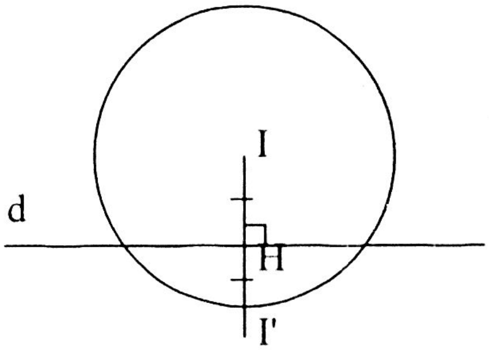
Bài 10

a. Phương trình đường tròn (C):

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

Có tâm I (1; 2) bán kính R = 2.

Gọi I'(a; b) đối xứng với I qua đường thẳng d thì: $\begin{cases} II' \perp d \\ H \in d \end{cases}$



Với H là trung điểm của I I' nên $H\left(\dfrac{a+1}{2}; \dfrac{b+2}{2}\right)$

Suy ra: $\begin{cases} a - 1 + b - 2 = 0 \\ \dfrac{a+1}{2} - \dfrac{b+2}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases}$

Đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d có phương trình: $(x-3)^2 + y^2 = 4$.

b. Toạ độ giao điểm của (C) và (C') là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 0 \\ x = 3; y = 2 \end{array}\right.$$

Vậy, giao điểm của (C) và (C') là (1; 0) và (3; 2).

§6. ELIP

Bài 1

a. Phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = a^2 - c^2$

Đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$ là Δ_1: $x = -\frac{a}{e}$

Đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_2\,(-c; 0)$ là Δ_2: $x = \frac{a}{e}$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2: $\frac{2a}{e} = 36 \Leftrightarrow \frac{a}{e} = 18$

Bán kính qua tiêu điểm $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$ và $MF_2 = a - \frac{c}{a}x$

Ta có $MF_1 + MF_2 = 2a = 9 + 15 \Leftrightarrow a = 12$, tâm sai $e = \frac{c}{a}$

Ta có hệ sau: $\begin{cases} \frac{a}{e} = 18 \\ e = \frac{c}{a} \\ b^2 = a^2 - c^2 \\ a = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 8 \\ a = 12 \\ b^2 = 80 \end{cases}$

Vậy phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$.

b. Ta có $MF_1 = 12 + \frac{2}{3}x$ và $MF_2 = 12 - \frac{2}{3}x$

* Khi $\begin{cases} MF_1 = 9 \\ MF_2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 + \frac{3}{2}x = 9 \\ 12 - \frac{3}{2}x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{12}$

Ta có $M_1\left(-\frac{9}{12};\frac{5}{2}\sqrt{11}\right)$ và $M_2\left(-\frac{9}{12};-\frac{5}{2}\sqrt{11}\right)$

Phương trình tiếp tuyến của (E) tại M_1, M_2 lần lượt:

$$x - y\sqrt{11} + 32 = 0 \text{ và } x + y\sqrt{11} + 32 = 0$$

* Khi $\begin{cases} MF_1 = 15 \\ MF_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{12}$

Ta có $M_3\left(\frac{9}{12};\frac{5}{2}\sqrt{11}\right)$ và $M_4\left(\frac{9}{12};-\frac{5}{2}\sqrt{11}\right)$

Phương trình tiếp tuyến của (E) tại M_3, M_4 lần lượt:

$$x + y\sqrt{11} - 32 = 0 \text{ và } x - y\sqrt{11} - 32 = 0.$$

Bài 2

a. Tiêu điểm F_1 (-2; 0), F_2 (2; 0)

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 2\sqrt{6}$

Độ dài trục nhỏ $B_1B_2 = 2\sqrt{2}$.

b. M(x, y) ∈ (E) và $\overrightarrow{MF_1} \perp \overrightarrow{MF_2}$ nên toạ độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Suy ra $M_1\left(-\sqrt{3};1\right)$; $M_2\left(-\sqrt{3};-1\right)$; $M_3\left(\sqrt{3};1\right)$; $M_4\left(\sqrt{3};-1\right)$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1, M_2, M_3, M_4 lần lượt là:

$$\sqrt{3}x - 3y + 6 = 0$$
$$\sqrt{3}x + 3y + 6 = 0$$
$$\sqrt{3}x + 3y - 6 = 0$$
$$\sqrt{3}x - 3y - 6 = 0.$$

Bài 3

Gọi A (x_0; y_0) ∈ (E): $\frac{x^2}{4} + y_0^2 = 1$ (1)

A, B đối xứng qua Ox nên B (x_0; $-y_0$)

$AB^2 = 4y_0^2$ và $AC^2 = (x_0 - 2)^2 + y_0^2$

ΔABC là tam giác đều AB = AC = BC

$\Rightarrow 4y_0^2 = (x_0 - 2)^2 + y_0^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} 3y_0^2 = (x_0 - 2)^2 \\ y_0^2 = 1 - \dfrac{x_0^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2;\ y_0 = 0 \\ x_0 = \dfrac{2}{7};\ y_0 = \pm\dfrac{4\sqrt{3}}{7} \end{array}\right.$

Vậy $A\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; $B\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$; $B\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

Bài 4

Phương trình đường thẳng A_1N: nx - 4y + 2n = 0

Phương trình đường thẳng A_2M: mx + 4y - 2n = 0

{I} = A, N ∩ A_2M có toạ độ $\begin{cases} x = \dfrac{2(m-n)}{m+n} \\ y = \dfrac{mn}{m+n} \end{cases}$

Phương trình đường thẳng MN: (n - m)x - 4y + 2n + 2m = 0 tiếp xúc với (E): $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ Suy ra: m.n =1.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{m-n}{m+n} \\ 2y = \dfrac{2}{m+n} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} + 4y^2 = 1$

Quỹ tích của điểm I là elip: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

Bài 5

a. M(3; m) ∈ (E): $\dfrac{9}{25} + \dfrac{m^2}{16} = 1 \Rightarrow m = \dfrac{16}{5}$ (do m > 0)

Phương trình tiếp tuyến của (E) tại M: 3x + 5y - 25 = 0.

b. Gọi $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;\ y_2) \in E$

Ta có $AF_1 = a + \dfrac{c}{a}x_1 = 5 + \dfrac{3}{5}x_1$

$AF_2 = a - \dfrac{c}{a}x_2 = 5 - \dfrac{3}{5}x_2$

$BF_1 = a + \dfrac{c}{a}x_1 = 5 + \dfrac{3}{5}x_1$

$$BF_2 = a - \frac{c}{a}x_2 = 5 - \frac{3}{5}x_2$$

Ta có $\quad AF_1 + BF_2 = 10 + \frac{3}{5}(x_1 - x_2) = 8 \Rightarrow x_1 - x_2 = -\frac{10}{3}$

$$AF_2 + BF_1 = 10 - \frac{3}{5}(x_1 - x_2) = 10 + \frac{3}{5}.\frac{10}{3} = 12$$

Vậy $\quad AF_2 + BF_1 = 12$.

§7. HYPERBOL

Bài 1

a. Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}}$;

Phương trình 2 đường tiệm cận: $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$;

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_1(-3; 0)$ là: $x + \frac{5}{3} = 0$;

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm $F_2(3; 0)$ là: $x - \frac{5}{3} = 0$;

b. $M(5; -4) \in (H)$, phương trình tiếp tuyến: $x + y - 1 = 0$.

Bài 2

a. Phương trình chính tắc của (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

b. Phương trình tiếp tuyến của (H): $5x + 4y \pm 16 = 0$.

Bài 3

a. Phương trình chính tắc của (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

b. * Đường thẳng Δ cắt (H) tại 2 điểm P, Q khi hệ:

$$\begin{cases} x - y + m = 0 \\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \quad \text{có hai nghiệm phân biệt.}$$

Suy ra: $7x^2 + 32mx + 16m^2 + 144 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow \Delta' = 144(m^2 - 7) > 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{7}$;

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của (1) thì ta có: $P(x_1; x_1 + m)$, $Q(x_2; x_2 + m)$.

Gọi I là trung điểm của PQ thì:

$$x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-16m}{7};$$

$$y_I = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 + m + x_2 + m}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} + m = \frac{-9m}{7};$$

Vậy $I(-\frac{16m}{7}; -\frac{9m}{7})$.

Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là

Δ_1: $3x + 4y = 0$ và Δ_2: $3x - 4y = 0$.

Δ cắt Δ_1 tại M có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + m = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\frac{4m}{7} \\ y_M = x_M + m = \frac{3m}{7} \end{cases};$$

Δ cắt Δ_2 tại N có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + m = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -4m \\ y_M = x_M + m = -3m \end{cases};$$

Khi đó: $\frac{x_M + x_N}{2} = \frac{-\frac{4m}{7} - 4m}{2} = -\frac{16m}{7}$; $\frac{y_M + y_N}{2} = \frac{\frac{3m}{7} - 3m}{2} = -\frac{9m}{7}$

$\Rightarrow$ I cũng là trung điểm của MN. Vậy MP = NQ.

* Ta có: $\overrightarrow{PM} = (x_M - x_1; y_M - y_1) \Rightarrow \overrightarrow{PM} = (-\frac{4m}{7} - x_1; -\frac{4m}{7} - x)$;

$\overrightarrow{PN} = (x_N - x_1; y_N - y_1) \Rightarrow \overrightarrow{PM} = (-4m - x_1; -4m - x_1)$;

Do P, M, N cùng thuộc Δ nên:

$$\overline{PM}.\overline{PN} = \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN} = 2(\frac{4m}{7} + x_1)(4m + x_1) = \frac{2}{7}(16m^2 + 32mx_1 + 7x_1^2)\frac{1}{2};$$

Ta có: $7x_1^2 + 32mx_1 + 16m^2 + 144 = 0 \Rightarrow 7x_1^2 + 32mx_1 + 16m^2 = -144$;

Từ đó: $\overline{PM}.\overline{PN} = \frac{2}{7}.(-144) = -\frac{288}{7}$.

Bài 4

a. Tọa độ các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{13}; 0)$, $F_2(\sqrt{13}; 0)$;

Phương trình các đường tiệm cận: $y = \pm\frac{3}{2}x$;

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1 là: $x + \frac{4}{\sqrt{13}} = 0$;

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2 là: $x - \frac{4}{\sqrt{13}} = 0$.

b. Xét hệ: $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 36 \\ mx - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 36 & (1) \\ y = mx - 1 & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1), ta có: $(9 - 4m^2)x^2 + 8mx - 40 = 0$ (3)

Δ cắt (H) tại hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau khi (3) có hai nghiệm trái dấu:

$$\begin{cases} 9 - 4m^2 \neq 0 \\ -\dfrac{40}{9 - 4m^2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm\dfrac{3}{2} \\ 9 - 4m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}.$$

Bài 5

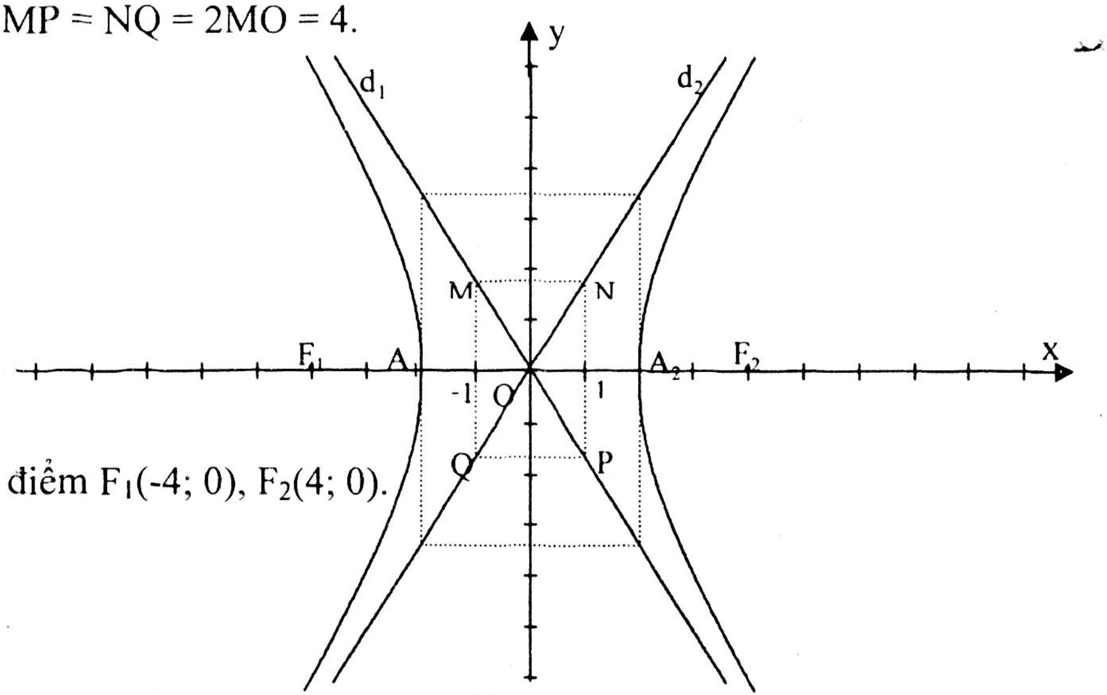
a. Phương trình các đường tiệm cận của (H): d_1: $\sqrt{3}x + y = 0$;

d_2: $\sqrt{3}x - y = 0$

Phương trình 2 đường chuẩn: Δ_1: $x + 1 = 0$; Δ_2: $x - 1 = 0$;

Độ dài phần đường tiệm cận bị chắn bởi 2 đường chuẩn:

MP = NQ = 2MO = 4.



b. Tiêu điểm $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$.

$d(F_1, d_1) = 2\sqrt{3}$ và $d(F_1, d_2) = 2\sqrt{3}$;

$d(F_2, d_1) = 2\sqrt{3}$ và $d(F_2, d_2) = 2\sqrt{3}$.

c. Đường thẳng a đi qua F_1, vuông góc với d_1 có phương trình: $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$, giao điểm của a với d_1 có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ x - \sqrt{3}y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra: $a \cap d_1 = \{M\}$ với $M(-1;\ \sqrt{3}) \in \Delta_1$.

Tương tự: $F_1Q \perp d_2$ và $F_2P \perp d_1$, $F_2N \perp d_2$.

§8. PARABOL

Bài 1

a. Ta có (P) $y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y$ thuộc dạng $x^2 = 2py$, suy ra p = 1. tiêu điểm

$F(0;\frac{1}{2})$. Thay vào phương trình của d, ta có: $2m0-2.\frac{1}{2}+1=0$, suy ra F ∈ d với mọi m.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{2mx+1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 = 0 \ (*)$$

$\Delta' = m^2 + 1 > 0$ với mọi m nên d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt M,N. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*) thì $M(x_1;\frac{x_1^2}{2}), N(x_2;\frac{x_2^2}{2})$ và

$$MN^2 = (x_2 - x_1)^2\left[1 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2\right]$$

$$MN^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]\left[1 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2\right]$$

Theo Viét: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = -1$

Thay vào: $MN^2 = 4(1+m^2)^2 \geq 4 \Leftrightarrow MN \geq 2$.

Đoạn thẳng MN ngắn nhất MN= 2 khi m = 0.

b. Tiếp tuyến với (P) tại M , N lần lượt có phương trình:

$xx_1 = y + y_1$ và $xx_2 = y + y_2$

Hệ số góc của tiếp tuyến với (P) tại M là $k_1 = x_1$ và hệ số góc của tiếp tuyến với (P) tại N là $k_2 = x_2$.

Ta có $k_1k_2 = x_1x_2 = -1$. Suy ra góc tạo bởi hai tiếp tuyến đó bằng 90^0.

Bài 2

a. Tiêu điểm F(2;0) và phương trình đường chuẩn: x + 2 = 0.

b. Điểm M $\in$ (P) có tung độ y = 4 nên hoành độ x = 2. Phương trình tiếp tuyến với (P) tại M là y = x + 2.

c. Đường thẳng d đi qua tiêu điểm F và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A , B nên có phương trình y = k (x - 2) với k $\neq$ 0

Phương trình tung độ giao điểm của d và (P):

$$\frac{y^2}{8}=\frac{y+2k}{k}\Leftrightarrow ky^2-8y-16k=0 \quad (*)$$

Phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với k$\neq$ 0. Gọi y_1 , y_2 là hai nghiệm của (*), khi đó hoành độ của hai điểm A , B là

$$x_1=\frac{y_1^2}{8},\ x_2=\frac{y_2^2}{8}.$$

Ta có : $x_1+x_2+4=\frac{1}{8}\left[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2\right]+4=$

$$\frac{8}{k^2}+8=8(\frac{1}{k^2}+1)\quad (**)$$

Mặt khác $AB=\sqrt{(y_2-y_1)^2\left[\frac{1}{64}(y_2+y_1)^2+1\right]}=8(\frac{1}{k^2}+1)$ (***).

Từ (**) và (***) ta suy ra AB = x_1 +x_2 + 4.

Bài 3

Tiêu điểm của (P) là F(1;0). Phương trình đường thẳng d đi qua F, có hệ số góc k : y = k (x - 1).

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $ky^2 - 4y - 4k = 0$ với k $\neq$ 0 phải có hai nghiệm phân biệt. Suy ra $\Delta' = 4(k^2 + 1) > 0$ với mọi k $\neq$ 0, gọi y_1 ,y_2 là hai nghiệm của phương trình cũng là tung độ của A , B. Trục của (P) là Ox có phương trình y = 0.

d_1= d(A, Ox) = $|y_1|$ và d_2 = d(B, Ox) = $|y_2|$;

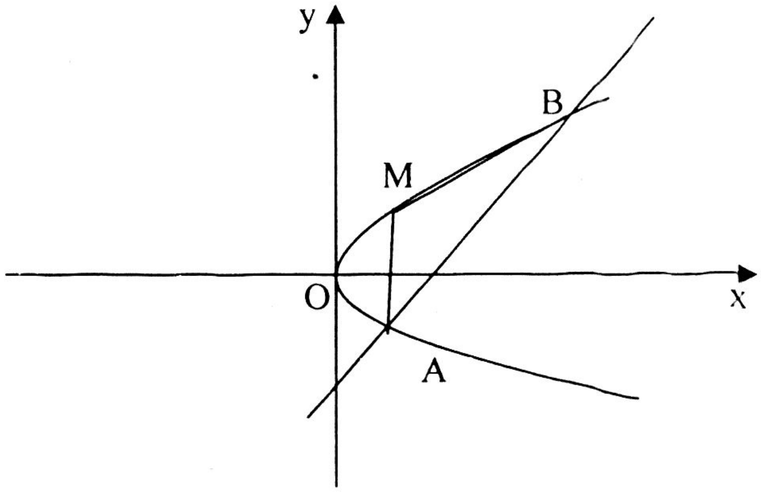
$d_1d_2 = |y_1||y_2| = |y_1 y_2| = 4$.

Bài 4

Phương trình đường thẳng AB: x - 2y -3 = 0

$M(x;y)\in \overset{\frown}{AB}$ thì x = y^2 và $1\le x\le 9$, $-1\le y\le 3$

h = d(M, AB) = $\frac{|x-2y-3|}{\sqrt{5}}$, AB = $\sqrt{80}$



$$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2}AB.h = 2\left|x - 2y - 3\right| = 2\left|y^2 - 2y - 3\right| = -2(y^2 - 2y - 3),$$

do $-1 \le y \le 3$

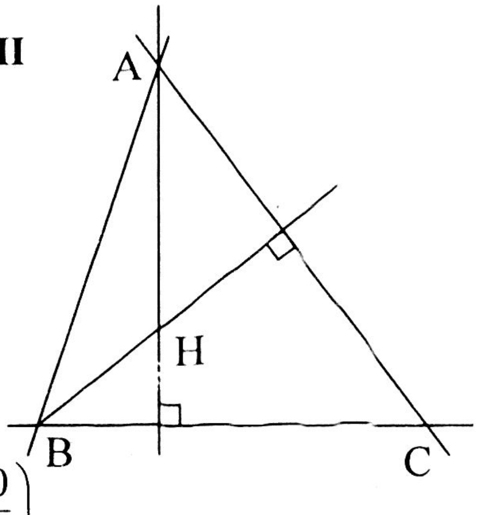
Ta có $y^2 - 2y - 3 = (y-1)^2 - 4 \ge -4$. Suy ra $S_{\Delta AMB} \le 8$, tam giác AMB có diện tích lớn nhất S = 8 khi y = 1 và x = 1. Vậy M (1; 1)

Bài 5

a. Phương trình chính tắc của parabol (P) $y^2 = 4x$

b. Tọa độ các điểm $A(\frac{9 + \sqrt{17}}{4}; \frac{1 + \sqrt{17}}{2})$ và $B(\frac{9 - \sqrt{17}}{4}; \frac{1 - \sqrt{17}}{2})$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II



Bài 1

a. Toạ độ các điểm A(5; 4), B(2; 7)
Phương trình đường thẳng chứa cạnh AC:
$5x - 7y + 3 = 0$
Phương trình đường thẳng chứa cạnh BC:
$2x - y + 3 = 0$

Toạ độ điểm C(-2; -1) và trọng tâm $G\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)$

b. Phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC:
$x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}y - 13 = 0$ tâm của (C) là $I\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$

c. Phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) tại A:

$13x + 14y - 81 = 0.$

Bài 2

Trực tâm H có toạ độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} -2x + y - 8 = 0 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{9}{4} \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

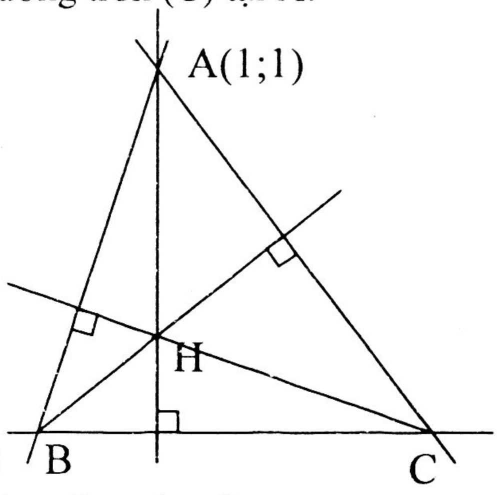
Phương trình đường cao AH:

$10x + 13y - 23 = 0$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AB: $3x - 2y - 1 = 0$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AC: $x + 2y - 3 = 0$

Toạ độ các đỉnh B (−17; −26) và C(3; 0).



Bài 3

a. Toạ độ các điểm B(3; 0) và C(0; 4)

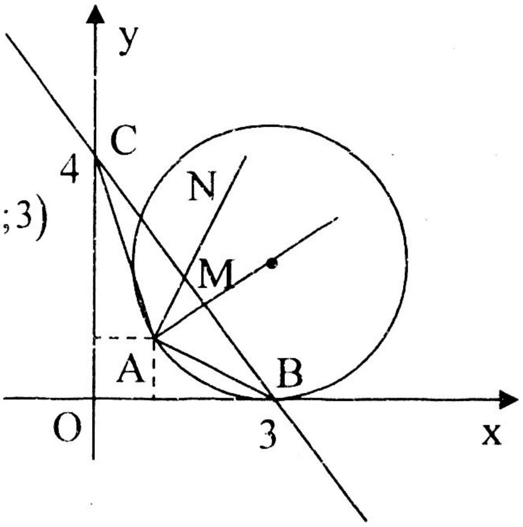
Gọi H (x; y) ta có $\overrightarrow{AH} = (x-1; y-1)$

$\overrightarrow{BC} = (-3; 4)$, $\overrightarrow{BH} = (x-3; y)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 3)$

$$\text{H là trực tâm } \Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy H (−3; −2).



b. Gọi $M_0 \in d$ sao cho $AM_0 \perp d$,

$AM_0 = d(A, d) = 1$

N_0 thuộc tia AM_0 sao cho $\overrightarrow{AM_0}.\overrightarrow{AN_0} = 4$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM_0}.\overrightarrow{AN_0} = AM_0.AN_0 = 4 \quad \Rightarrow AN_0 = 4$

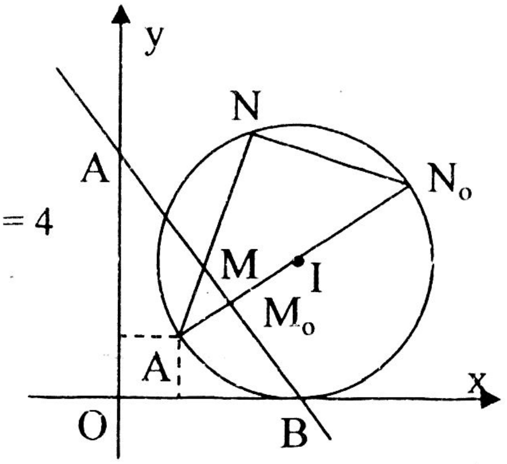
Với $M \in d$ và N thuộc tia AM ta có:

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = AM.AN = 4$

Suy ra: $AM_0.AN_0 = AM.AN$

$$\Leftrightarrow \frac{AM}{AN_0} = \frac{AM_0}{AN}$$

$$\Rightarrow \Delta AMM_0 \sim \Delta AN_0N \Rightarrow \widehat{AM_0M} = \widehat{ANN_0} = 90^\circ$$



Vậy N nhìn AN_o dưới một góc vuông nên N thuộc đường tròn (C) đường kính AN_o

Gọi I là trung điểm AN_0, ta có $AI = \frac{AN_0}{2} = 2$

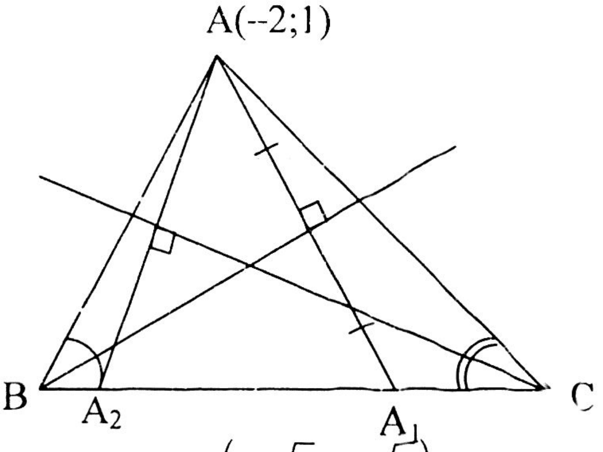
Suy ra I đối xứng với A qua d nên $I\left(\frac{13}{5};\frac{11}{5}\right)$

Phương trình đường tròn (C): $\left(x-\frac{13}{5}\right)^2+\left(y-\frac{11}{5}\right)^2=4$.

Bài 4

Gọi A_1; A_2 lần lượt đối xứng với A qua phân giác góc C, góc B

Ta có: $A_1(-2;-5)$ và $A_2(0;3)$ thuộc đường thẳng BC phương trình đường thẳng chứa cạnh BC: $4x-y+3=0$.



Bài 5

Ta có BC cắt Ox tại B (1; 0). Gọi A(a; 0) và $C\left(a;\sqrt{3}a-\sqrt{3}\right)$d

Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{2a+1}{3};\frac{\sqrt{3}(a-1)}{3}\right)$d

Cách 1:

Ta có: $AB=|a-1|$; $AC=\sqrt{3}|a-1|$, $BC=2|a-1|$

Do đó: $S_{\Delta ABC}\frac{1}{2}AB.AC=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)^2$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC}=r\frac{(AB+AC+BC)}{2}$

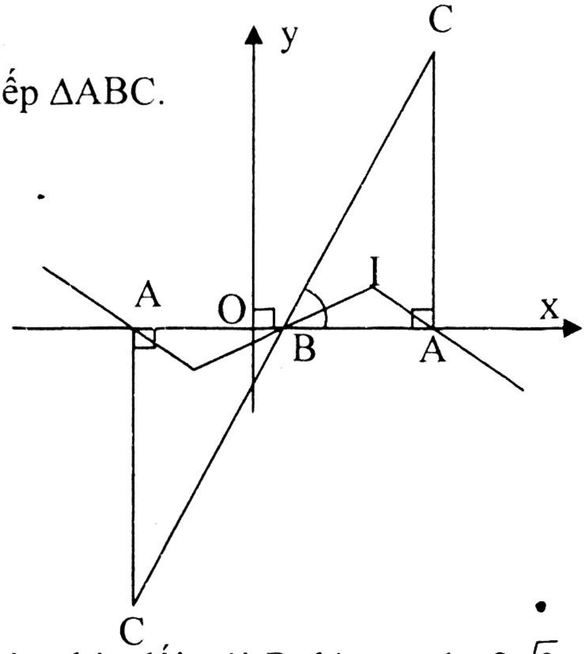
$$\Rightarrow r=\frac{2S_{\Delta ABC}}{AB+AC+BC}=\frac{|a-1|}{\sqrt{3}+1}=2$$

$$\Leftrightarrow |a-1|=2\sqrt{3+2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2\sqrt{3}+3\\ a=-2\sqrt{3}-1\end{array}\right.$$

Vậy trọng tâm tam giác ABC là $G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3};\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$

hoặc $G_2\left(\dfrac{-4\sqrt{3}-1}{3};\dfrac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Cách 2:



Gọi $I(x_I; y_I)$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Ta có $r = 2$ nên $y_I = \pm 2$, phương trình của đường thẳng BC:

$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ có hệ số góc $k = \sqrt{3} = \text{tg}\alpha \Rightarrow \alpha = 60^\circ$: Phương trình phân giác trong góc B là BI: $y = \text{tg}30^\circ(x-1)$;

$y = \dfrac{x-1}{\sqrt{3}}$; $\Rightarrow x_I = 1 \pm 2\sqrt{3}$

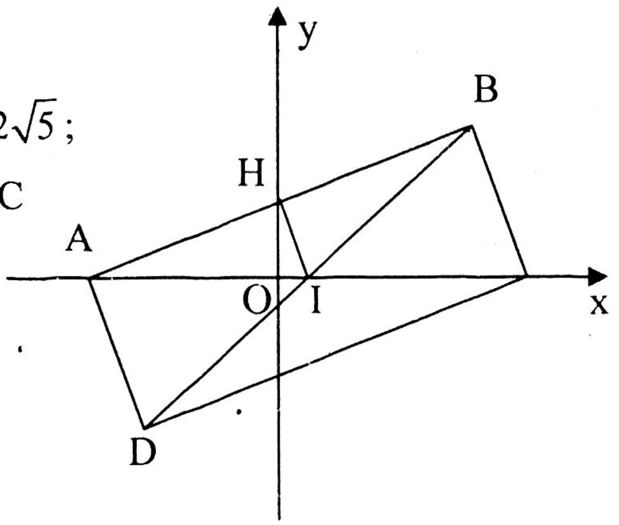
Trường hợp 1: Nếu A và O nằm khác phía đối với B thì $x_I = 1 + 2\sqrt{3}$ nên $I\left(1+2\sqrt{3};2\right)$, $d(I, AC) = 2 \Rightarrow a = 1 + 2\sqrt{3} + 2 = 3 + 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3};\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Trường hợp 2: Nếu A và O nằm cùng phía đối với điểm B thì $x_I = 1 - 2\sqrt{3}$ nên $I\left(1-2\sqrt{3};-2\right)$; $d(I, AC) = 2 \Rightarrow a = -1 - 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow G_2\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3};\frac{-6-2\sqrt{3}}{2}\right).$$

Bài 6



Ta có: $d\left(I, AB\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow AD = \sqrt{5}$; $AB = 2AD = 2\sqrt{5}$;

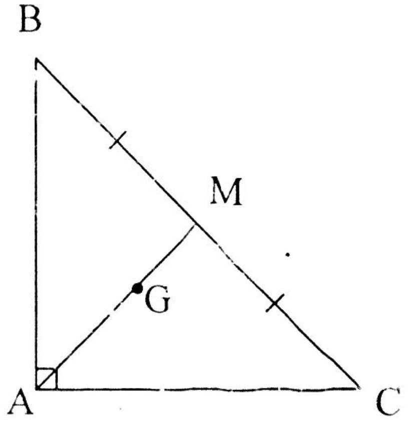
$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5 = AC$

Suy ra: $AI = IB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{5}{2}$

Do đó A, B là các giao điểm của đường tròn tâm I, bán kính $R = \frac{5}{2}$ với đường thẳng AB. Toạ độ A, B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$

Suy ra A(−2; 0); B(2; 2) (do $x_A < 0$)

$\Rightarrow$ C(3; 0); D(−1; −2).



Bài 7

G là trọng tâm tam giác ABC, M là trung điểm cạnh BC nên: $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG}$

$\Rightarrow$ A(0; 2)

ΔABC vuông cân tại A nên AM $\perp$ BC phương trình đường thẳng BC: $-x + 3y + 4 = 0$

MB = MC = MA = $\sqrt{10}$ nên B, C thuộc đường tròn tâm M, bán kính $R = \sqrt{10}$, toạ độ của B, C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 10 \\ -x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$

Suy ra B(4; 0), C(−2; −2) hoặc B(−2; −2) và C(4; 0).

Bài 8

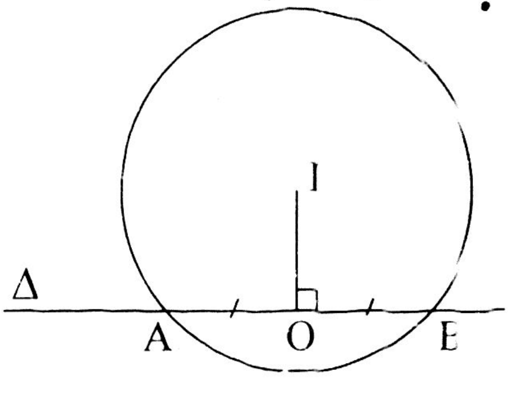
a. Phương trình đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

b. O là trung điểm của dây cung AB nên OI $\perp$ AB phương trình đường thẳng Δ: $x - 2y = 0$.

Bài 9

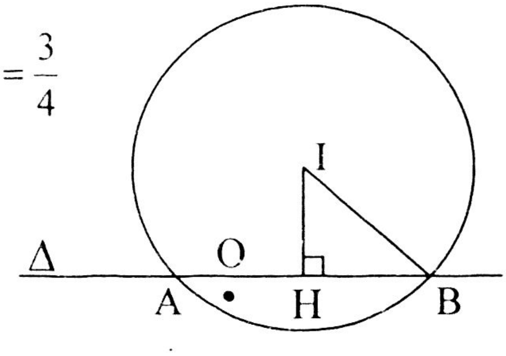
a. Tâm I (1; −3), bán kính R = 5.

b. Gọi Δ là đường thẳng đi qua O, có hệ số góc k phương trình của tam giác: $kx - y = 0$. Δ cắt (C) tại A, B và AB = 8, kẻ IH $\perp$ AB thì



$$AH = HB = \frac{AB}{2} = 4$$

$$IH = \sqrt{BI^2 - HB^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

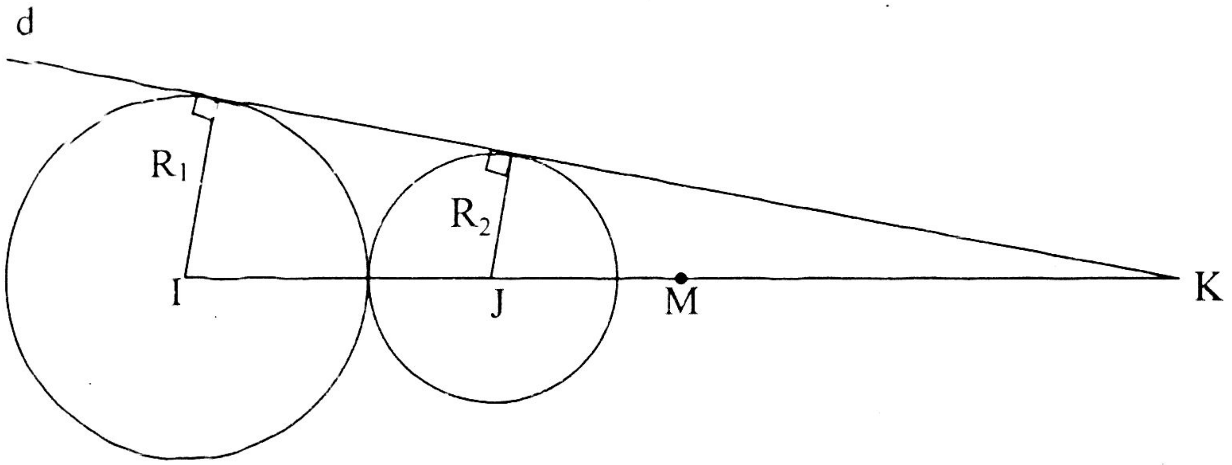


$$IH = d(I,\Delta) = \frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}} = 3 \Leftrightarrow k = 0;\ k = \frac{3}{4}$$

Phương trình đường thẳng tam giác:

$y = 0;\ 3x - 4y = 0.$

Bài 10



a. Tâm và bán kính của đường tròn (C_1) là $I(2; -1)$, $R_1 = 3$

Tâm và bán kính của đường tròn (C_2) là $J(5; 3)$, $R_2 = 2$

Ta có $IJ = 5 = R_1 + R_2$ nên (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) tọa độ tiếp điểm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \\ 3x + 4y - 17 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{19}{5} \\ y = \dfrac{7}{5} \end{cases} \qquad \text{Vậy } H\left(\frac{19}{5}; \frac{7}{5}\right).$$

b. Đường thẳng d tiếp xúc với (C_1), (C_2) và không đi qua H cắt đường thẳng IJ tại K nên ta có: $\overrightarrow{KJ} = \dfrac{R_2}{R_1}\overrightarrow{KI} \Leftrightarrow \overrightarrow{KY} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{KI}$

Suy ra $K(11; 11)$.

c. Đường tròn (C) đi qua K và tiếp xúc với (C_1), (C_2) tại H nên (C) có đường kính là KH, bán kính $R = \dfrac{KH}{2}$

Tâm của (C) là trung điểm M của KH nên $M\left(\dfrac{37}{5}; \dfrac{31}{5}\right)$ và $R = \dfrac{12}{2} = 6$

Phương trình có đường tròn (C): $\left(x-\frac{37}{5}\right)^2+\left(y-\frac{31}{5}\right)^2=36$.

Bài 11

Tâm và bán kính của đường tròn (C_m) là $I(m; -2m)$, $R_1 = 1$

Tâm và bán kính của đường tròn (C) là $O(0; 0)$ và $R_2 = 1$

a. Gọi Δ là đường thẳng có phương trình: $Ax + By + C \neq 0$, $(A^2 + B^2 = 0)$ luôn tiếp xúc với (C_m)

Suy ra: $d(I, \Delta) = R_1$ với mọi m

$$\Leftrightarrow \frac{\left|(A-2B)m+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=1 \text{ với mọi } m \in R$$

$\Leftrightarrow (A - 2B)^2m^2 + 2C(A - 2B)m + C^2 - A^2 - B^2 = 0$ có nghiệm với mọi $m \in R$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} A-2B=0 \\ 2C(A-2B)=0 \\ C^2-A^2-B^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2B \\ C=\pm B\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Phương trình } \Delta_1\text{: } 2x+y+\sqrt{5}=0 \\ &\text{Phương trình } \Delta_2\text{: } 2x+y-\sqrt{5}=0 \end{aligned}\right\} \text{ luôn tiếp xúc với } (C_m)\text{, với mọi m}$$

b. Để (C_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thì $OI < R_1 + R_2$ và $O \neq I$

$\Leftrightarrow \sqrt{5m^2} < 2$ và $m \neq 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{5}} < m < \frac{2}{\sqrt{5}}$ và $m \neq 0$

Đường thẳng đi qua hai điểm A, B là trục đẳng phương của hai đường tròn (C_m) và (C). Phương trình của đường thẳng AB: $2x - 4y - 5m = 0$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2;1)$ không đổi.

Bài 12

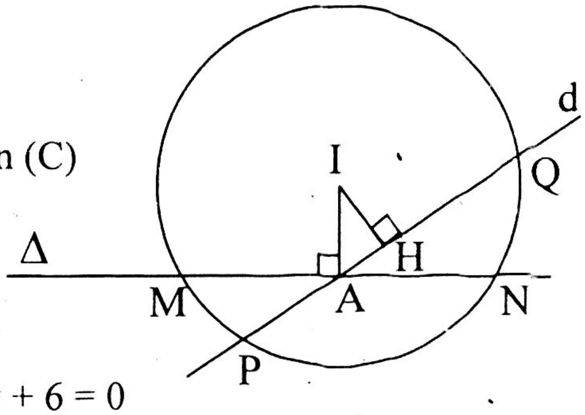
a. Tâm I $(2; -4)$ và bán kính $R = 5$,

$P_{A/(C)} = -20 < 0$

Suy ra điểm A nằm trong đường tròn (C)

b. (i). Đường thẳng Δ đi qua A và tạo với đường tròn (C) một dây cung có độ dài lớn nhất khi Δ đi qua tâm I.

Phương trình đường thẳng Δ: $x + 2y + 6 = 0$



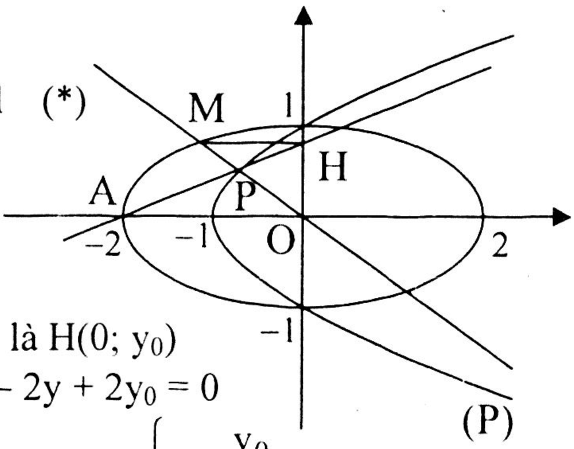
(ii). Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với AI tại A, d là đường thẳng bất kì đi qua A, kẻ IH ⊥ d

Trong tam giác vuông IHA, ta có IA > IH

Suy ra: PQ > MN

Để Δ tạo với đường tròn (C) một dây cung có độ dài nhỏ nhất thì Δ vuông góc với AI tại A, phương trình của Δ: $2x - y - 8 = 0$.

Bài 13



Gọi M $(x_0, y_0) \in (E)$ thì: $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ (*)

Phương trình đường thẳng OM:

$y = \frac{y_0}{x_0}x$

Hình chiếu vuông góc của M lên Oy là $H(0; y_0)$

Phương trình đường thẳng AH: $xy_0 - 2y + 2y_0 = 0$

{P} = AH ∩ OM có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = \frac{y_0}{x_0}x \\ xy_0 - 2y + 2x_0 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2x_0}{2 - x_0} \\ y = \frac{2y_0}{2 - x_0} \end{cases} \text{ với } x_0 \neq 2$$

Suy ra: $\begin{cases} x_0 = \frac{2x}{x+2} \\ y_0 = \frac{2y}{x+2} \end{cases}$ thay vào (1) ta có: $y^2 = x + 1$

Vậy điểm P luôn chạy trên một Parabol (P): $y^2 = x + 1$.

Bài 14

a. Gọi $M(x_0y_0) \in (E)$: $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1$ (*)

Ta có: $MF_1 = 5 + \frac{3}{4}x_0$ và $MF_2 = 5 - \frac{3}{4}x_0$ với $F_1(-3; 0)$ và $F_2(3; 0)$

$MF_1 = 4MF_2$ suy ra $x_0 = 4$ thay vào (*) ta có $y_0 = \pm\frac{12}{5}$

Vậy $M_1\left(4;\frac{12}{5}\right)$, $M_2\left(4;-\frac{12}{5}\right)$.

b. Gọi N $(x_0, y_0) \in (E)$ và tiếp tuyến với (E) tại N là Δ: $16x_0x + 25y_0y - 400 = 0$ khoảng cách từ hai tiêu điểm F_1; F_2 đến đường thẳng tam giác là $d_1 = d(F_1, \Delta) = \dfrac{|3x_0+25|16}{\sqrt{256x_0^2+625y_0^2}}$,

$$d_2 = d(F_2, \Delta) = \frac{16|3x_0-25|}{\sqrt{256x_0^2+625y_0^2}},$$

$$d_1 . d_2 = \frac{16^2|9x_0-625|}{\sqrt{256x_0^2+625y_0^2}} \quad (*)$$

Ta có: $\dfrac{x_0^2}{25}+\dfrac{y_0^2}{16}=1 \Leftrightarrow y_0^2=\left(\dfrac{25-x_0^2}{25}\right)16$

Thay vào (*) ta có $d_1.d_2 = 16$.

Bài 15

Gọi M(m; 0) và N (0; n) với m > 0 và n > 0

Phương trình đường thẳng MN: $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}-1=0$

MN tiếp xúc với elip khi: $16\left(\dfrac{1}{m}\right)^2+9\left(\dfrac{1}{n}\right)^2=1$

$$MN^2=m^2+n^2=\left(m^2+n^2\right)\left(\frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}\right)=25+16\frac{n^2}{m^2}+\frac{9m^2}{n^2}$$

Theo bất đẳng thức Côsi: $16\dfrac{n^2}{m^2}+9\dfrac{m^2}{n^2}\geq 24$

Suy ra: $MN^2 \geq 49 \Leftrightarrow MN \geq 7$

GTNN(MN) = 7 khi $16\dfrac{n^2}{m^2}=9\dfrac{m^2}{n^2}$

Suy ra: $m = 2\sqrt{7}$, $n=\sqrt{21}$ (m > 0 và n > 0)

Vậy: $M\left(2\sqrt{7};0\right)$; $N\left(0;\sqrt{21}\right)$.

Bài 16

a. (C_m) là elip khi và chỉ khi $|m| > 5$

(C_m) là hypebol khi và chỉ khi $|m| < 5$ và $m \neq 0$.

b. Gọi điểm A(1; a) với $a \neq 0$, thay toạ độ của A vào phương trình của (C_m), ta có: $m^4 - m^2(26 + a^2) + 25 = 0$ (1)

Đặt $\begin{cases} X = m^2 \\ X \geq 0 \end{cases}$ thì $X^2 - X(26 + a^2) + 25 = 0$ (2)

$\Delta = (36 + a^2)(16 + a^2) > 0 \ \forall a$

$S = 26 + a^2 > 0 \ \forall a$

$P = 25 > 0$

Suy ra: (2) có hai nghiệm phân biệt dương nên (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy luôn có 4 đường cong của họ (C_m) đi qua A

Xét $g(x) = X^2 - X(26 + a^2) + 25$

$g(25) = -25a^2 < 0 \ \forall a \neq 0$

Suy ra (2) có hai nghiệm X_1, X_2: $m_1 = -\sqrt{X_2}$; $m_2 = -\sqrt{X_1}$; $m_3 = \sqrt{X_1}$ và $m_4 = \sqrt{X_2}$.

Ta có: $m_1 < -5 < m_2 < m_3 < 5 < m_4$

Vậy có hai elip ứng với $m = \pm\sqrt{X_2}$

có hai hyperbol ứng với $m = \pm\sqrt{X_1}$.

* * *

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 9715012; (04) 7685236.
Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập nội dung
TRẦN VĂN HÙNG
Sửa bài
NGUYỄN NAM
Trình bày bìa
HOÀNG VĨNH

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP TOÁN 10 (tập 2)
Mã số: 1L-72 ĐH2006
In 2.000 cuốn, khổ 16x24 tại Xí nghiệp in Tân Bình
Số xuất bản: 461-2006/CXB/5-70/ĐHQGHN, ngày 12/06/2006.
Quyết định xuất bản số: 194 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2006